ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 22 August 1942 Heft 4

Inhalt:

Seite

Hauptaufsätze. W. Müller: Beitrag zur Theorie der langsamen Strömung zweier exzentrischer Kreiszylinder in der zähen Flüssigkeit 177
S. v. Borbély: Über die Luftkräfte, die auf einen harmonisch schwingenden zweidimensionalen Flügel bei Überschallgeschwindigkeit wirken . . 190
H. Bilharz: Über eine gesteuerte eindimensionale Bewegung 206
L. Collatz: Natürliche Schrittweite bei numerischer Integration von Differentialgleichungssystemen . 216
H. Hadwiger: Über gleichwahrscheinliche Aufteilungen 226

Kleine Mitteilungen. Kamke, Willers und H. Görtler: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen 233
G. Schulz: Über die Lösung von Gleichungssystemen durch Iteration 234
J. Heinhold: Zur Interpolation bei ungleichen Tafelabständen 235
L. Neder: Über die Berechnung von beliebig langen Aggregaten und „Faktorgregaten" mit Hilfe eines einzigen einfachen Nomogramms 238

Buchbesprechungen. Cauer: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. — Schilhansl: Die mittragende Breite bei der Kreisplatte mit radialen Rippen. — Schaefer und Bergmann: Grundaufgaben des physikalischen Praktikums. — Pohl: Einführung in die Mechanik, Akustik und Wärmelehre. — Weiter eingegangene Bücher . . 239
Nachrichten 240

HAUPTAUFSÄTZE

Beitrag zur Theorie der langsamen Strömung zweier exzentrischer Kreiszylinder in der zähen Flüssigkeit.

Von *Wilhelm Müller* in München.

Im Anschluß an frühere Arbeiten des Verfassers wird die Strömung untersucht, die durch langsame Drehung zweier eine zähe Flüssigkeit begrenzenden Kreiszylinder hervorgerufen wird und das System der Kräfte und Momente, die von der Flüssigkeit auf die Zylinder ausgeübt werden. Dabei wird Gelegenheit genommen, einige bemerkenswerte Sonderfälle genauer zu diskutieren.

1. Einleitung.

In zwei größeren Arbeiten habe ich die langsame ebene Strömung untersucht, die durch die Drehung zweier Kreiszylinder erzeugt wird[1]). Insbesondere gelang es, neben der Stromfunktion die Zähigkeitskräfte in endlicher Form zu berechnen, die an jedem der beiden Zylinder wirksam sind. Während die erste Arbeit von den Verhältnissen ausging, wie sie im allgemeinen bei einem im geschlossenen zylindrischen Lager rotierenden Zapfen vorausgesetzt werden, also vor allem die Wirkung auf den inneren rotierenden Zylinder untersuchte, bezog sich die zweite Arbeit im wesentlichen auf die Verallgemeinerung des Viskosimeter-Problems[2]), bei der der äußere Zylinder in Drehung versetzt und die Wirkung der Flüssigkeitskräfte auf den inneren (torsionsfähig aufgehängten) Zylinder bestimmt wird. In beiden Fällen war keine besondere Einschränkung über das Radienverhältnis und die Exzentrizität der Zylinder angenommen. Wie ich im besonderen in der ersten Arbeit gezeigt habe, lassen sich die Ergebnisse der Theorie ohne weiteres auch auf den Fall übertragen, daß beide Zylinder auseinander liegen oder der eine Zylinder in eine Ebene übergeht. In der vorliegenden Arbeit möchte ich nun einige Ergänzungen geben, besonders mit Rücksicht auf die Annahme, daß beide Zylinder in gleichem oder entgegengesetztem Sinne in Umdrehung versetzt werden. Dabei wird es sich neben der Behandlung einiger bemerkenswerter Sonderfälle, für die übrigens auch die Strombilder berechnet wurden, in erster Linie darum handeln, das vollständige System der Zähigkeitskräfte aufzustellen und rechnerisch und graphisch zu er-

[1]) Wilh. Müller: Ebene Spannungs- und Strömungsfelder mit zwei kreiszylindrischen Grenzen, Ing.-Arch. Bd. 13 (1942), S. 37 bis 58.
[2]) Wilh. Müller: Über die Drehung von Kreiszylindern in der zähen Flüssigkeit und die Theorie der Kräfte am Rotations-Viskosimeter, Ann. Phys. Bd. 41 (1942), S. 335 bis 354.
Beide Arbeiten, in denen auch die Literatur ziemlich vollständig angegeben ist, werde ich unter I und II zitieren.

fassen, das in Verbindung mit beiden Zylindern auftritt, zunächst ohne Rücksicht auf die besonderen physikalischen Versuchsbedingungen. Bei der rechnerischen Behandlung, deren Ergebnisse nur kurz gebracht werden können, verwende ich wieder die Methode der krummlinigen bipolaren Koordinaten, die dem Problem am besten angepaßt ist und die Möglichkeit bietet, den ganzen Umkreis der Sonderfälle am vollständigsten zu entwickeln.

2. Bipolare Koordinaten und Stromfunktion.

Betrachtet man die beiden Kreise K_1 und K_2 als Elemente $\xi = \alpha$, $\xi = \beta$ eines Apollonischen Kreisbüschels $\xi = \text{konst.}$ mit Beziehung auf die Pole P_1 und P_2 $(z = \pm i b)$, die zugleich die gemeinsamen Punkte des orthogonalen Kreisbüschels $\eta = \text{konst.}$ sind, so läßt sich die komplexe Koordinate $z = x + i y$ jedes Punktes der Ebene, bzw. des von beiden Kreisen begrenzten Feldes durch die bipolaren Koordinaten ξ und η in der Form darstellen

$$z = x + i y = i b \operatorname{Ctg} \frac{\zeta}{2} = \frac{b \sin \eta}{\operatorname{Cof} \xi - \cos \eta} + i \frac{b \operatorname{Sin} \xi}{\operatorname{Cof} \xi - \cos \eta} \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Die Lage der Mittelpunkte und die Halbmesser der Kreise $\xi = \text{konst.}$ und $\eta = \text{konst.}$ sind durch

$$\left.\begin{aligned} (z_\xi)_0 &= i b \operatorname{Ctg} \xi, \quad & r_\xi &= \frac{b}{\operatorname{Sin} \xi}; \\ (z_\eta)_0 &= b \operatorname{ctg} \eta, \quad & r_\eta &= \frac{b}{\sin \eta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

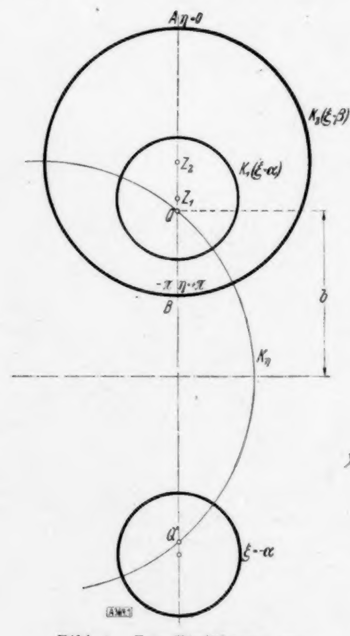


Bild 1. Zur Einführung von bipolaren Koordinaten ξ und η.

bestimmt. Die Koordinate ξ hat im Pol P_1 (als Nullkreis) den Wert ∞ und nimmt auf der positiven Seite der x-Achse positive Werte an, die abnehmen bis zum Werte Null, der dem unendlich großen Kreis $\xi = 0$ (der x-Achse) entspricht. Die Koordinate η hat im höchsten Punkt A jedes ξ-Kreises den Wert $\eta = 0$, sie nimmt auf der positiven Seite der y-Achse positive Werte, auf der anderen Seite negative Werte an und springt daher im tiefsten Punkt B jedes ξ-Kreises vom Wert $+\pi$ auf den Wert $-\pi$ (Bild 1).

Das hydrodynamische Problem läßt sich bei Beschränkung auf kleine Geschwindigkeiten oder kleine Reynoldssche Zahlen, bzw. Vernachlässigung der Trägheitskräfte gegenüber den Zähigkeitskräften, zurückführen auf die Lösung der biharmonischen Differentialgleichung für die Stromfunktion

$$\Delta \Delta \Psi = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Wenn wir bipolare Koordinaten einführen und Ψ in der Form

$$\Psi = \frac{b}{\operatorname{Cof} \xi - \cos \eta} \Phi = h \Phi$$

ansetzen, so erhält man mit der Abkürzung $\Delta^* \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}$

$$\left.\begin{aligned} \Delta \Psi &= \frac{1}{h^2} \Delta^* \Psi = \frac{1}{h} \Delta^* \Phi + \frac{1}{b} (\operatorname{Cof} \xi + \cos \eta) \Phi - \frac{2}{b} \left(\operatorname{Sin} \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \sin \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right), \\ \Delta \Delta \Psi &= \frac{1}{h^3} \left\{ \Delta^* \Delta^* \Phi - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \Phi \right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4).$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten in den Richtungen ξ und η erhalten wir

$$v_\xi = \frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}; \quad v_\eta = -\frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Der Rotor der Geschwindigkeit wird

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = w = -\Delta \Psi \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Die Druckfunktion p genügt den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \mu \, \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \mu \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \eta} = -\mu \frac{\partial w}{\partial \eta}; \qquad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\mu \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \xi} = \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Von Konstanten abgesehen, bilden also der durch den Reibungskoeffizient μ dividierte Druck und der Rotor den Real- und Imaginarteil einer Funktion $W(\zeta) = w + i\,\frac{p}{\mu}$ der komplexen Variablen $\zeta = \xi + i\,\eta$, oder die Linien gleichen Druckes sind die orthogonalen Trajektorien zu den Linien konstanter Wirbelung.

Was nun die Integration der Gl. (3) angeht, so läßt sich zeigen, daß die Stromfunktion unseres Problems in folgender Weise angesetzt werden kann:

$$\Psi = h\,[(A + B\,\xi + C\,\mathfrak{Cos}\,2\,\xi + D\,\mathfrak{Sin}\,2\,\xi)\cos\eta + E\,\mathfrak{Sin}\,\xi + F\,\xi\,\mathfrak{Cos}\,\xi + G\,\mathfrak{Cos}\,\xi + H\,\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi] \quad . \quad (8),$$

wo die auftretenden Konstanten auf Grund der Randbedingungen und der Stetigkeitsforderung für den Druckverlauf ermittelt werden können. Wenn z. B. der innere Zylinder K_1 $(\xi = \alpha)$ mit der konstanten Geschwindigkeit $v_1 = -(v_\eta)_{\xi=\alpha}$ rotiert, während der äußere $\xi = \beta$ in Ruhe bleibt, so ergeben sich durch eine Rechnung, die hier nicht wiedergegeben werden soll, bei der Festsetzung $\Psi(\beta) = 0$ für die Konstanten die Werte

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 = J_1[\mathfrak{Sin}(\alpha-\beta) + 2\,\beta\,\mathfrak{Cos}(\alpha-\beta)]; & E_1 = 2\,J_1\,\mathfrak{Cos}^2\beta\,\mathfrak{Cos}(\alpha-\beta); \\ B_1 = -F_1 = 2\,J_1\,\mathfrak{Cos}(\alpha-\beta); & G_1 = -J_1\,\mathfrak{Cos}(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,2\,\beta; \\ C_1 = -J_1\,\mathfrak{Sin}(\alpha+\beta); & \\ D_1 = J_1\,\mathfrak{Cos}(\alpha+\beta); & H_1 = -\dfrac{v_1\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}^2(\alpha-\beta)}{N} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9),$$

wenn zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l} J_1 = \dfrac{v_1\,L_1}{N}; \quad L_1 = (\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\alpha - \mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}(\alpha-\beta); \\ N = \mathfrak{Sin}(\alpha-\beta)\,[(\alpha-\beta)(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Sin}^2\beta) - 2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}(\alpha-\beta)] \end{array}\right\} \quad (9a)$$

gesetzt wird. Damit ergibt sich

$$\left.\begin{array}{rl} N \cdot \dfrac{\Psi_1(\mathfrak{Cos}\,\xi - \cos\eta)}{b\,v_1} = & [(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\alpha - \mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}(\alpha-\beta)] \times \\ & \times [(\xi-\beta)\,\mathfrak{Cos}(\alpha-\beta)(\mathfrak{Cos}\,\xi - \cos\eta) + \mathfrak{Sin}(\xi-\beta)\,\mathfrak{Cos}(\xi-\alpha)\cos\eta] \\ & + \mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Cos}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}(\xi-\beta) - \mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}^2(\alpha-\beta)(\xi-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\xi \\ & - (\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\beta\,\mathfrak{Cos}(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}(\xi-\beta) \end{array}\right\} \quad . \quad (10).$$

Wenn dagegen der äußere Zylinder mit der Umfangsgeschwindigkeit $-(v_\eta)_{\xi=\beta} = v_2$ rotiert und der innere ruht, so ergibt sich durch Vertauschung von α und β und Ersetzung von v_1 durch v_2 für die Stromfunktion der Ausdruck

$$\left.\begin{array}{rl} N \cdot \dfrac{\Psi_2(\mathfrak{Cos}\,\xi - \cos\eta)}{b\,v_2} = & [\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\beta] \times \\ & \times [(\xi-\alpha)\,\mathfrak{Cos}(\alpha-\beta)(\mathfrak{Cos}\,\xi - \cos\eta) + \mathfrak{Sin}(\xi-\alpha)\,\mathfrak{Cos}(\xi-\beta)\cos\eta] \\ & - \mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\beta\,\mathfrak{Sin}(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}(\xi-\alpha) - \mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}^2(\alpha-\beta)(\xi-\alpha)\,\mathfrak{Sin}\,\xi \\ & + (\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Cos}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}(\xi-\alpha) \end{array}\right\} \quad . \quad (11).$$

Bei Drehung beider Zylinder hat man als Stromfunktion

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2.$$

Bevor wir einige wichtige Sonderfälle untersuchen, wollen wir eine Übersicht über die Bestimmung der Kräfte und Momente geben, die auf die einzelnen Zylinder wirken.

3. Ergebnisse der Kräfteberechnung.

Wir gehen am besten von dem Fall der Rotation des inneren Zylinders $\xi = \alpha$ aus. Wie ich näher begründet habe (vgl. I, S. 41), hat man für die Normal- und Tangentialspannung an einem Element des Zylinders die Ausdrücke

$$(\sigma_\xi)_\alpha = -p; \quad (\tau)_{\xi=\alpha} = \mu\left[\frac{1}{h}\,\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + \frac{v_\eta}{r_1}\right]_{\xi=\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12).$$

Durch Einsetzung der Werte von v_η und Benutzung von (8) ergibt sich

$$p = \frac{2\mu}{b}[J_1 \mathfrak{Cof}(\alpha-\beta)\sin 2\eta - (2J_1 \mathfrak{Cof}\beta - H_1 \mathfrak{Sin}\alpha)\sin\eta] \quad . \quad . \quad (13),$$

$$\tau = -\frac{2\mu}{b}(\mathfrak{Cof}\alpha - \cos\eta)[2J_1 \mathfrak{Sin}(\alpha-\beta)\cos\eta + 2J_1 \mathfrak{Cof}(\alpha-\beta)\mathfrak{Sin}\alpha + H_1 \mathfrak{Cof}\alpha] \quad . \quad . \quad (14).$$

Aus der Form der Ausdrücke erkennt man ohne Schwierigkeit, daß bei der Integration über den Umfang des Kreises K_1 die y-Komponente der Kraft verschwindet. Es bleibt dann

$$\left.\begin{aligned} P_{11} &= -r_1\int_0^{2\pi} p\cos\varphi\,d\varphi - r_1\int_0^{2\pi}\tau\sin\varphi\,d\varphi \\ M_{11} &= r_1^2\int_0^{2\pi}\tau\,d\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (15).$$

Drückt man den Polarwinkel φ durch η aus mit Hilfe der Formeln

$$\cos\varphi = \frac{\mathfrak{Sin}\alpha\sin\eta}{\mathfrak{Cof}\alpha - \cos\eta}; \quad \sin\varphi = \frac{\mathfrak{Cof}\alpha\cos\eta - 1}{\mathfrak{Cof}\alpha - \cos\eta}; \quad d\varphi = -\frac{\mathfrak{Sin}\alpha\,d\eta}{\mathfrak{Cof}\alpha - \cos\eta},$$

so erhält man nach Auswertung der Integrale

$$P_{11} = -4\pi\mu H_1; \quad M_{11} = -4\pi\mu r_1(F_1 \mathfrak{Sin}\alpha + H_1 \mathfrak{Cof}\alpha) \quad . \quad . \quad (16).$$

In derselben Weise lassen sich die Kraft und das Moment berechnen, die auf den Zylinder K_2 übertragen werden. Dabei ist insbesondere auf den Vorzeichenwechsel zu achten, der dadurch entsteht, daß das Flüssigkeitsgebiet nicht mehr außerhalb, sondern innerhalb des Zylinders liegt. Man erhält dann

$$P_{12} = 4\pi\mu H_1 = -P_{11}, \quad M_{12} = 4\pi\mu r_2(F_1 \mathfrak{Sin}\beta + H_1 \mathfrak{Cof}\beta) \quad . \quad . \quad (17).$$

Daraus ergibt sich wegen $r_2 = r_1 \dfrac{\mathfrak{Sin}\alpha}{\mathfrak{Sin}\beta}$:

$$M_{12} + M_{11} = 4\pi\mu r_1 H_1 \frac{\mathfrak{Sin}(\alpha-\beta)}{\mathfrak{Sin}\beta}.$$

Nun ist aber nach (2) der Faktor $\dfrac{\mathfrak{Sin}(\alpha-\beta)}{\mathfrak{Sin}\beta} = \varepsilon$ nichts anderes als das Verhältnis $\dfrac{e}{r_1}$ der Exzentrizität beider Kreise zum Radius des kleinen Kreises. Wir haben also

$$\left.\begin{aligned} M_{12} + M_{11} &= -P_{11} r_1 \varepsilon = -P_1 e, \\ M_{12} + M_{11} &+ P_{11} e = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (18).$$

Diese Gleichung und die Beziehung zwischen den Kräften stehen im Einklang mit dem Impulssatz[3], nach dem der Impulsfluß durch die Grenzflächen (Zylinder) bzw. sein Moment der Summe sämtlicher auf die Zylinder wirkenden Kräfte bzw. der Summe sämtlicher Kraftmomente gleich sein muß. Da der Impulsfluß verschwindet, so wird auch die resultierende Kraft bzw. das resultierende Moment gleich Null.

Ganz entsprechend gestaltet sich die Rechnung für den Fall, daß der äußere Zylinder mit der Geschwindigkeit v_2 rotiert. Statt der Konstanten A_1, B_1 usw. treten die durch Vertausch von α und β zu gewinnenden Konstanten A_2, B_2 usw. auf. Man erhält dann die Werte

$$\left.\begin{aligned} P_{22} &= 4\pi\mu H_2; \qquad P_{21} = -4\pi\mu H_2 \\ M_{22} &= 4\pi\mu r_2(F_2 \mathfrak{Sin}\beta + H_2 \mathfrak{Cof}\beta) \\ M_{21} &= -4\pi\mu r_1(F_2 \mathfrak{Sin}\alpha + H_2 \mathfrak{Cof}\alpha) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (19),$$

zwischen denen die Beziehungen bestehen:

$$P_{22} = -P_{21}; \quad M_{21} + M_{22} + P_{22}\cdot\varepsilon r_1 = 0 \quad . \quad . \quad (20).$$

[3]) Wilh. Müller: Über den Impulssatz der Hydrodynamik für bewegte Gefäßwände, Ann. Phys. 5. Folge Bd. 16 (1933), S. 489.

Setzt man nun die Werte der Konstanten ein, so entstehen schließlich folgende Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
P_{11} &= -P_{12} = 4\pi\mu v_1 \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\mathfrak{Sin}^2\alpha+\mathfrak{Sin}^2\beta)-2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)}\\
M_{11} &= -4\pi\mu r_1 v_1 \frac{(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}^2\alpha\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta)-(\mathfrak{Sin}^2\alpha-\mathfrak{Sin}^2(\alpha-\beta))}{(\alpha-\beta)(\mathfrak{Sin}^2\alpha+\mathfrak{Sin}^2\beta)-2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)}\\
M_{12} &= 4\pi\mu r_2 v_1 \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,[(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta)-1]}{(\alpha-\beta)(\mathfrak{Sin}^2\alpha+\mathfrak{Sin}^2\beta)-2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)}\\
P_{21} &= -P_{22} = 4\pi\mu v_2 \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\mathfrak{Sin}^2\alpha+\mathfrak{Sin}^2\beta)-2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)}\\
M_{22} &= -4\pi\mu r_2 v_2 \frac{(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}^2\beta\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta)-(\mathfrak{Sin}^2\beta-\mathfrak{Sin}^2(\alpha-\beta))}{(\alpha-\beta)(\mathfrak{Sin}^2\alpha+\mathfrak{Sin}^2\beta)-2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)}\\
M_{21} &= 4\pi\mu r_2 v_2 \frac{\mathfrak{Sin}^2\beta\,[(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta)-1]}{(\alpha-\beta)(\mathfrak{Sin}^2\alpha+\mathfrak{Sin}^2\beta)-2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21).$$

Die Ausdrücke können noch vereinfacht werden durch Einführung des Radienverhältnisses $\frac{r_2}{r_1}=\lambda=\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha}{\mathfrak{Sin}\,\beta}$ und der Exzentrizität $\varepsilon=\frac{\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)}{\mathfrak{Sin}\,\beta}$ bzw. durch Verwendung der leicht zu bestätigenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{Sin}\,\beta=\frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha; \quad \mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon}{\lambda}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha; \quad \mathfrak{Cof}\,\alpha=\frac{\lambda^2-1-\varepsilon^2}{2\,\varepsilon},\\
&\mathfrak{Cof}\,\beta=\frac{\lambda^2-1+\varepsilon^2}{2\,\varepsilon\,\lambda}; \qquad \mathfrak{Sin}\,\alpha=\frac{1}{2\,\varepsilon}\sqrt{[(\lambda-1)^2-\varepsilon^2][(\lambda+1)^2-\varepsilon^2]};\\
&\mathfrak{Cof}\,(\alpha-\beta)=\frac{\lambda^2+1-\varepsilon^2}{2\,\lambda}, \qquad \mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\lambda^2+1-\varepsilon^2}{2\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22).$$

Wenn man gleichzeitig beide Fälle kombiniert, also voraussetzt, daß beide Zylinder mit den Geschwindigkeiten $v_1=r_1\,\omega_1$ bzw. $v_2=r_2\,\omega_2$ rotieren, so ergibt sich für die resultierenden Kräfte und Momente

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= P_{11}+P_{21}=4\pi\mu r_1\frac{\varepsilon\,(\omega_1+\lambda^2\,\omega_2)}{(\alpha-\beta)\,(1+\lambda^2)-2\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha}=-P_2,\\
M_1 &= 4\pi\mu r_1 r_2\frac{\lambda\,(\alpha_2-\omega_1)\,[(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta)-1]-\omega_1\frac{\varepsilon^2}{\lambda}}{(\alpha-\beta)\,(1+\lambda^2)-2\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha},\\
M_2 &= 4\pi\mu r_1 r_2\frac{\lambda\,(\omega_1-\omega_2)\,[(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta)-1]-\omega_2\,\lambda\,\varepsilon^2}{(\alpha-\beta)\,(1+\lambda^2)-2\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (23).$$

Die zugeordneten Beiwerte kann man in verschiedener Weise abspalten. Setzt man etwa

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= 4\pi\mu r_1\,\omega_1\,(c_p)_1=4\pi\mu r_1\,\omega_2\,(c'_p)_1,\\
M_1 &= 4\pi\mu r_1 r_2\,\omega_1\,(c_m)_1=4\pi\mu r_1 r_2\,\omega_2\,(c'_m)_1;\\
M_2 &= 4\pi\mu r_1 r_2\,\omega_1\,(c_m)_2=4\pi\mu r_1 r_2\,\omega_2\,(c'_m)_2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (24),$$

so wird für $\omega_2=\varrho\,\omega_1$ bzw. $\omega_1=\frac{1}{\varrho}\,\omega_2=\varrho'\,\omega_2$

$$\left.\begin{aligned}
(c_m)_1 &= \frac{\lambda\,(\varrho-1)\,[(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta)-1]-\frac{\varepsilon^2}{\lambda}}{(\alpha-\beta)\,(1+\lambda^2)-2\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha};\\
(c'_m)_1 &= \frac{\lambda\,(1-\varrho')\,[(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta)-1]-\frac{1}{\lambda}\,\varepsilon^2\,\varrho'}{(\alpha-\beta)\,(1+\lambda^2)-2\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha};\\
(c_m)_2 &= \frac{\lambda\,(1-\varrho)\,[(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta)-1]-\lambda\,\varrho\,\varepsilon^2}{(\alpha-\beta)\,(1+\lambda^2)-2\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha};\\
(c'_m)_2 &= \frac{\lambda\,(\varrho'-1)\,[(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta)-1]-\lambda\,\varepsilon^2}{(\alpha-\beta)\,(1+\lambda^2)-2\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha};\\
(c_p)_1 &= \frac{\varepsilon\,(1+\varrho\,\lambda^2)}{(\alpha-\beta)\,(1+\lambda^2)-2\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha}; \qquad (c'_p)_1=\frac{\varepsilon\,(\lambda^2+\varrho')}{(\alpha-\beta)\,(1+\lambda^2)-2\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (25).$$

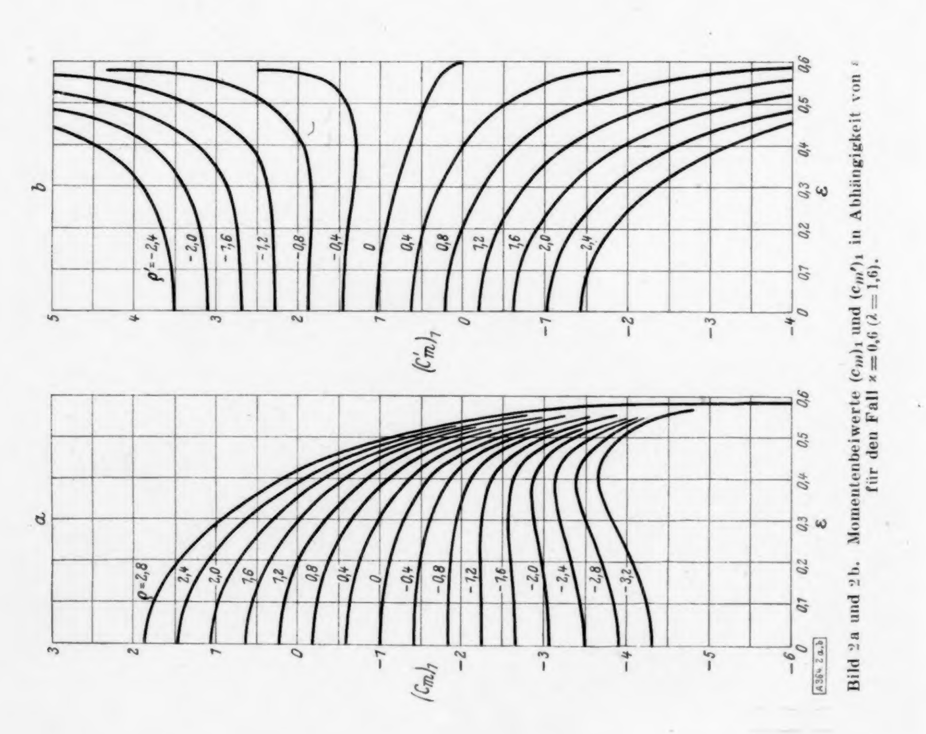


Bild 2a und 2b. Momentenbeiwerte $(c_m)_1$ und $(c_m')_1$ in Abhängigkeit von ε für den Fall $\varkappa = 0{,}6$ ($\lambda = 1{,}6$).

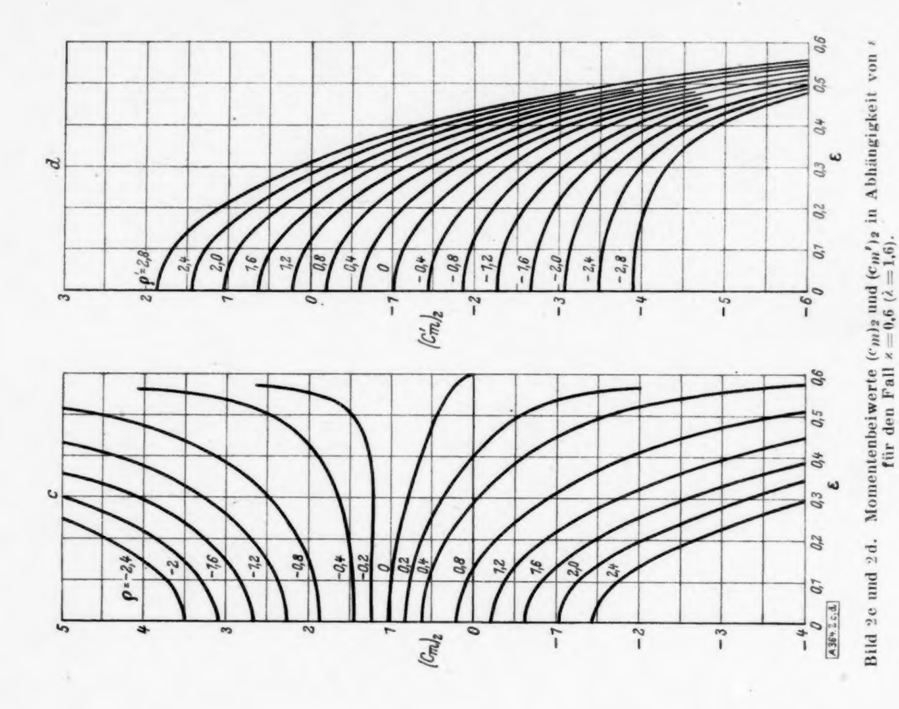


Bild 2c und 2d. Momentenbeiwerte $(c_m)_2$ und $(c_m')_2$ in Abhängigkeit von ε für den Fall $\varkappa = 0{,}6$ ($\lambda = 1{,}6$).

Die Werte sind bereits für die Fälle, daß nur einer der Zylinder rotiert, eingehend diskutiert und für verschiedene Radienverhältnisse in Abhängigkeit von der Exzentrizität graphisch veranschaulicht worden (vgl. I und II). Ergänzend haben wir hier (in den Bildern 2 und 3) für ein bestimmtes Radienverhältnis $\lambda = 1{,}6$ die Beiwerte $(c_p)_1$, $(c'_p)_1$, $(c_m)_1$, $(c'_m)_1$, $(c_m)_2$, $(c'_m)_2$ für verschiedene Werte von ϱ und ϱ' in Abhängigkeit von ε dargestellt. Es ergibt sich im besonderen, daß bei Drehung eines Zylinders die Momente an beiden Zylindern entgegengesetzt gleich werden, wenn die Exzentrizität gleich Null ist und daß bei wachsender Exzentrizität das Moment am ruhenden Zylinder abnimmt, während das Moment am rotierenden Zylinder wächst. Für den theoretischen, physikalisch nicht verwertbaren Grenzfall der Berührung beider Zylinder ($\lambda - 1 = \varkappa = \varepsilon$) erhält man im allgemeinen unendlich große Kraft- und Momentenwerte. Nur an den ruhenden Zylindern verschwinden die Momente für $\varepsilon = \varkappa$, d. h. $(c'_m)_1$ bzw. $(c_m)_2$ werden Null für $\varrho' = 0$ bzw. $\varrho = 0$, oder beide Werte werden unbestimmt, wenn ϱ' bzw. ϱ von positiven oder negativen Ausgangswerten gegen Null konvergieren.

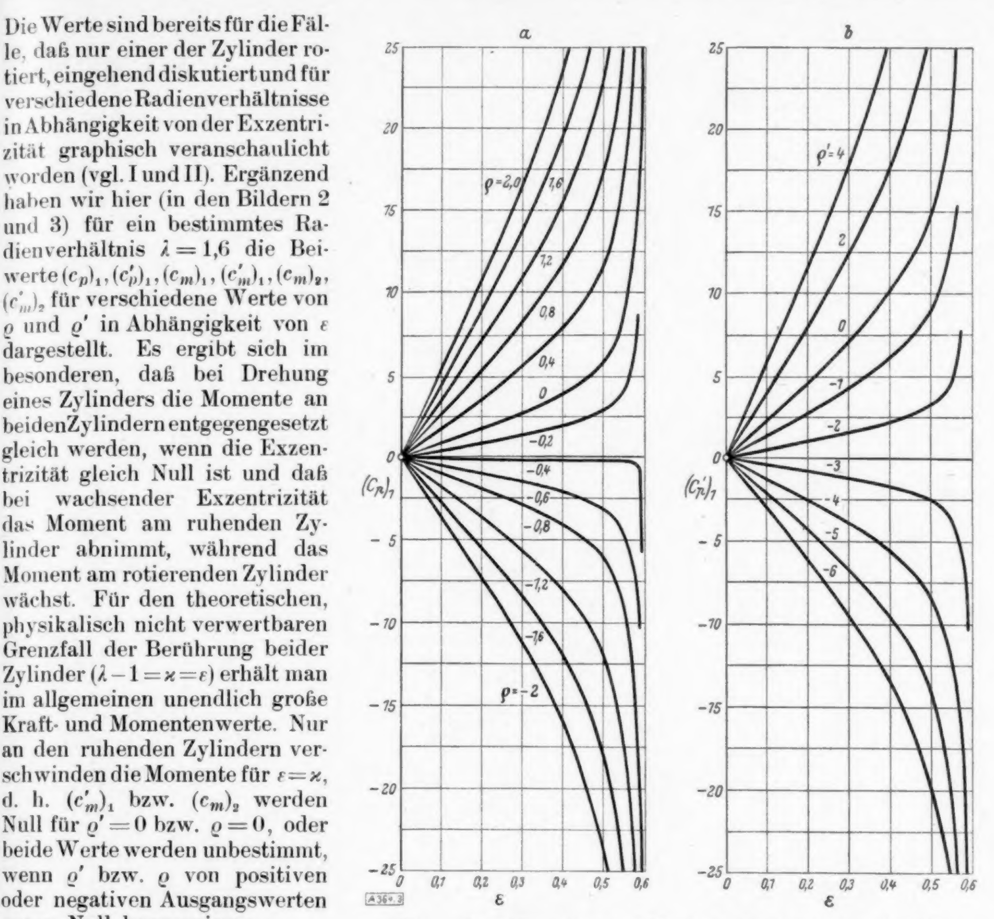


Bild 3. Kraftbeiwerte $(c_p)_1$ und $(c_p')_1$ bei Rotation beider Zylinder.

4. Bemerkenswerte Sonderfälle.

Unter den vielen Spezialfällen, die möglich sind, wollen wir einige Fälle herausgreifen, die durch verhältnismäßig einfache Form der Stromfunktion gekennzeichnet sind. Wenn wir etwa die Kreise, also die Größen α und β ungeändert lassen, so können wir z. B. das Geschwindigkeitsverhältnis so festsetzen, daß die Durchflußmenge durch einen Querschnitt des Ringraumes zwischen den Zylindern einen vorgeschriebenen Wert annimmt, also z. B. verschwindet. Ferner lassen sich gewisse Sonderfälle durch bestimmte Annahmen über die Kraftwirkung auf die Zylinder kennzeichnen.

a) Eine besonders einfache Annahme ist das Verschwinden der Durchflußmenge $Q = \Psi(\alpha) - \Psi(\beta) = 0$. Da $\Psi_1(\beta) = 0$ und $\Psi_2(\alpha) = 0$, so ergibt sich

$$\Psi_1(\alpha) = \Psi_2(\beta).$$

Mit Einführung des Nenners N (vgl. (9a)) ergeben sich nach einiger Rechnung folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} N\,\frac{\Psi_1(\alpha)}{b} &= v_1\,[(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\alpha - \mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)]\cdot[(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Cof}\,(\alpha-\beta) - \mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)],\\ N\,\frac{\Psi_2(\beta)}{b} &= v_2\,[(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\beta - \mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)]\cdot[(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Cof}\,(\alpha-\beta) - \mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)] \end{aligned}\right\} . \quad (26).$$

Daraus entnimmt man dann als Bedingung für die Drehgeschwindigkeiten

$$v_2 = -\,v_1\,\frac{(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\alpha - \mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\beta} = -\,v_1\,\frac{(\alpha-\beta)\,\lambda^2 - \varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha}{\lambda\,[\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha - (\alpha-\beta)]} \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \quad (27)$$

oder

$$\omega_2 = -\omega_1 \frac{\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}\alpha} \cdot \frac{(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}(\alpha-\beta)}{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\beta} = -\omega_1 \frac{(\alpha-\beta)\lambda^2 - \varepsilon \operatorname{Sin}\alpha}{\lambda^2[\varepsilon \operatorname{Sin}\alpha - (\alpha-\beta)]} \quad . \; . \; . \quad (27\text{a}).$$

Wenn man v_2 durch v_1 ausdrückt und in Ψ_2 einsetzt, so erhält man für die resultierende Stromfunktion $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ den Ausdruck

$$\frac{\Psi(\operatorname{Cof}\xi - \cos\eta)\, N[(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\beta - \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}(\alpha-\beta)]}{v_1 b \operatorname{Sin}(\alpha-\beta)}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha-\beta)^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}^2\beta \operatorname{Sin}(\xi-\beta) + (\alpha-\beta)^2 \operatorname{Sin}^2\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}(\xi-\alpha)\\
&- (\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}^2\beta \operatorname{Sin}(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}(\xi-\alpha) - (\alpha-\beta)\operatorname{Sin}^2\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}(\xi-\beta)\\
&+ (\xi-\alpha)\operatorname{Sin}^2(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\xi + (\xi-\beta)\operatorname{Sin}^2(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\xi\\
&- (\alpha-\beta)(\xi-\alpha)\operatorname{Sin}^2\alpha \operatorname{Sin}(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\xi - (\alpha-\beta)(\xi-\beta)\operatorname{Sin}^2\beta \operatorname{Sin}(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\xi = Z.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\cos\eta$ durch $\operatorname{Cof}\xi = \operatorname{Cof}(\xi-\alpha)\operatorname{Cof}\alpha + \operatorname{Sin}(\xi-\alpha)\operatorname{Sin}\alpha$ ersetzt, was mit Rücksicht auf den im Nenner auftretenden Faktor $\operatorname{Cof}\xi - \cos\eta$ gleichbedeutend ist mit der Abänderung der Konstanten. In dem Ausdruck Z der rechten Seite läßt sich aber der Nenner N herausheben. Es wird dann

$$Z = N\left[\frac{(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}(\xi-\alpha)}{\operatorname{Sin}(\alpha-\beta)} - (\xi-\alpha)\operatorname{Sin}\xi\right].$$

Dann entsteht für Ψ der relativ einfache Ausdruck

$$\frac{(\operatorname{Cof}\xi - \cos\eta)\,\Psi}{v_1 b} = \frac{(\xi-\alpha)\operatorname{Sin}(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\xi - (\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}(\xi-\alpha)}{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\beta} \quad . \; . \; . \quad (28).$$

Für die Konstruktion der Stromlinien kann man die reduzierte Stromfunktion

$$\psi = \frac{(\xi-\alpha)\operatorname{Sin}(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\xi - (\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}(\xi-\alpha)}{\operatorname{Cof}\xi - \cos\eta} = \frac{F(\xi)}{\operatorname{Cof}\xi - \cos\eta}$$

benutzen. Setzt man $\psi = c$, so wird

$$\cos\eta = \operatorname{Cof}\xi - \frac{1}{c}F(\xi).$$

Jedem Werte von c entspricht eine Stromlinie. Läßt man c nach einer arithmetischen Reihe zu- oder abnehmen, so erhält man die Schar der Stromlinien derart, daß die Flüssigkeitsmenge zwischen zwei benachbarten Linien gleich bleibt. Bei Übertragung auf rechtwinklige Koordinaten hat man

$$x = \frac{b\,c\,\sin\eta}{F(\xi)}; \quad y = \frac{b\,c \operatorname{Sin}\xi}{F(\xi)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29).$$

Die Funktion ψ (bzw. Ψ) wird an den Kreisen K_1 und K_2, d. h. für $\xi = \alpha$ und $\xi = \beta$ Null. Die Stromlinie zerfällt also für $c = 0$ in die beiden Kreise. Auf der Zentralen zwischen den Kreisen liegen nun zwei Punkte ξ_1 und ξ_2, in denen die Geschwindigkeit der Strömung Null wird. Sie ergeben sich aus $\dfrac{\partial\Psi}{\partial\xi} = 0$ für $\eta = 0$ bzw. $= \pi$. Das ergibt die beiden Bestimmungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cof}\alpha - \operatorname{Sin}(\alpha-\beta)(\xi_1 - \alpha + \operatorname{Sin}\xi_1) - (\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Tg}\frac{\xi_1}{2} = 0\\
(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cof}\alpha - \operatorname{Sin}(\alpha-\beta)(\xi_2 - \alpha - \operatorname{Sin}\xi_2) - (\alpha-\beta)\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Ctg}\frac{\xi_2}{2} = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (30).$$

Wie die nähere Diskussion oder die Zeichnung ergibt, haben diese beiden Punkte verschiedenen Charakter. Während der im engsten Teil des Zwischenraumes gelegene Punkt $\xi = \xi_1$, $\eta = \pi$ als Doppelpunkt einer ausgezeichneten Stromlinie angehört und eine Stelle bezeichnet, an der die Strömung eine Umkehrung erfährt, ist der Punkt $\xi = \xi_2$, $\eta = 0$ ein isolierter Punkt oder der Mittelpunkt einer ihn umgebenden zirkulatorischen Strömung. Wir wollen den ersten Punkt als Umkehrpunkt (oder Staupunkt), den zweiten als Zirkulations-

punkt bezeichnen. Die übrigen Stromlinien zerfallen in zwei Zweige, die durch die singuläre Kurve mit Doppelpunkt getrennt werden.

In den Bildern 4 und 5 haben wir die Stromlinienschar für zwei Fälle konstruiert, die durch folgende Werte als Hauptdaten gekennzeichnet sind:

1. $\alpha = 1{,}3963, \quad \beta = 0{,}5236;$
$(y_0)_1 = 1{,}1305\, b, \quad r_1 = 0{,}528\, b;$
$(y_0)_2 = 2{,}081\, b, \quad r_2 = 1{,}825\, b;$

Umkehrpunkt
$\xi_1 = 0{,}9425, \quad \eta = \pi\,(y_1 = 0{,}438\, b);$

Zirkulationspunkt
$\xi_2 = 0{,}767, \quad \eta = 0\,(y_2 = 2{,}734\, b).$

Singuläre Stromlinie entspricht
$c = c_1 = 0{,}106.$

2. $\alpha = 1{,}6699, \quad \beta = 1{,}0667;$
$(y_0)_1 = 1{,}074\, b, \quad r_1 = 0{,}3904\, b;$
$(y_0)_2 = 1{,}268\, b, \quad r_2 = 0{,}7807\, b.$

$\xi_1 = 1{,}355, \quad \eta = \pi\,(y_1 = 0{,}5899\, b);$
$\xi_2 = 1{,}3049, \quad \eta = 0\,(y_2 = 1{,}744\, b);$
$c_1 = 0{,}0383.$

Besonders einfach gestaltet sich die Berechnung der Druckfunktion. Man erhält

$$p = \frac{2\mu}{b} v_1 \times \frac{\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\xi \sin\eta}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\beta} \quad (31).$$

Die Schar der Kurven gleichen Druckes, die für den zweiten der eben genannten Fälle in Bild 6 wiedergegeben ist, stimmt übrigens im ganzen für alle Kreispaare überein, die demselben Werte von b zugeordnet werden können und für die $Q = 0$ ist.

Für die Kräfte und Momente erhalten wir die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= -P_2 = -4\pi\mu r_1\omega_1 \frac{\varepsilon}{\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha-(\alpha-\beta)} \\ M_1 &= -4\pi\mu r_1^2\omega_1 \frac{\varepsilon\,\mathfrak{Cof}\,\alpha}{\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha-(\alpha-\beta)} \\ M_2 &= 4\pi\mu r_2^2\omega_1 \times \frac{\varepsilon\,\mathfrak{Cof}\,\beta}{\lambda\,[\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha-(\alpha-\beta)]} \end{aligned}\right\} \quad (32).$$

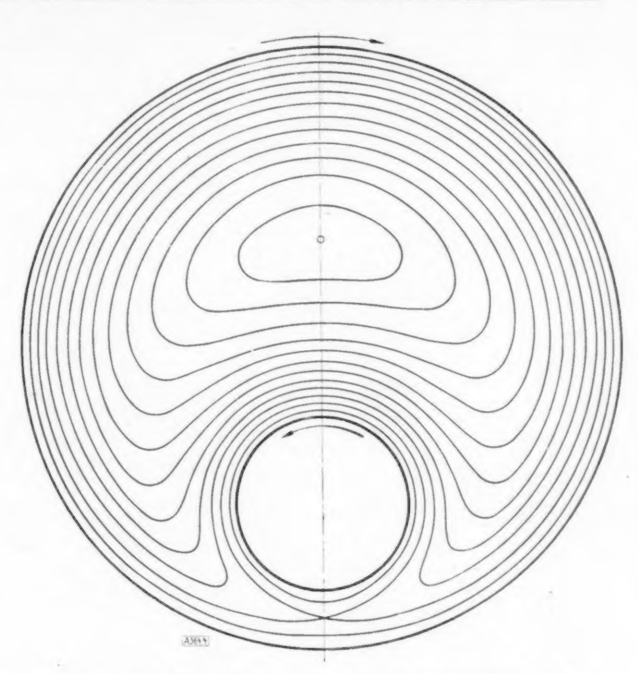


Bild 4. Stromlinienbild in der Umgebung zweier gegeneinander rotierender Kreiszylinder mit $Q=0$, Fall I.

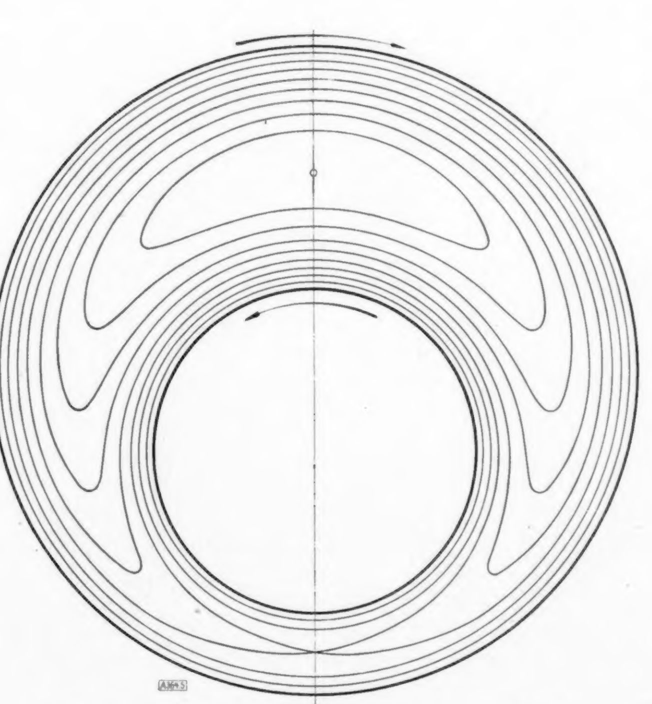


Bild 5. Stromlinien in der Umgebung zweier rotierender Zylinder mit $Q=0$, Fall II.

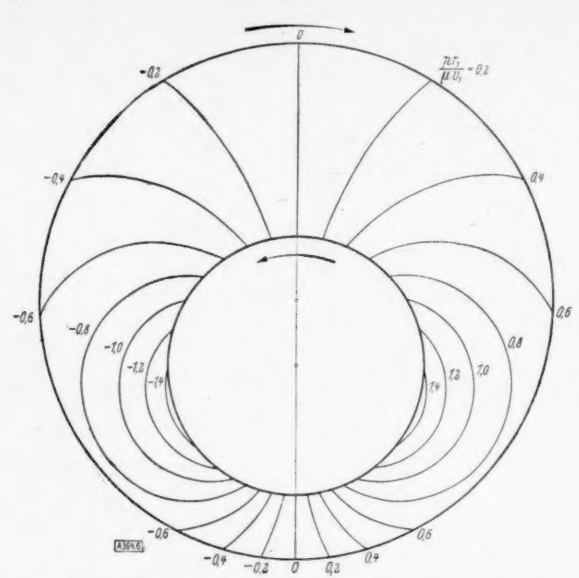


Bild 6. Kurven gleichen Druckes bei zwei gegeneinander rotierenden Zylindern ($Q=0$).

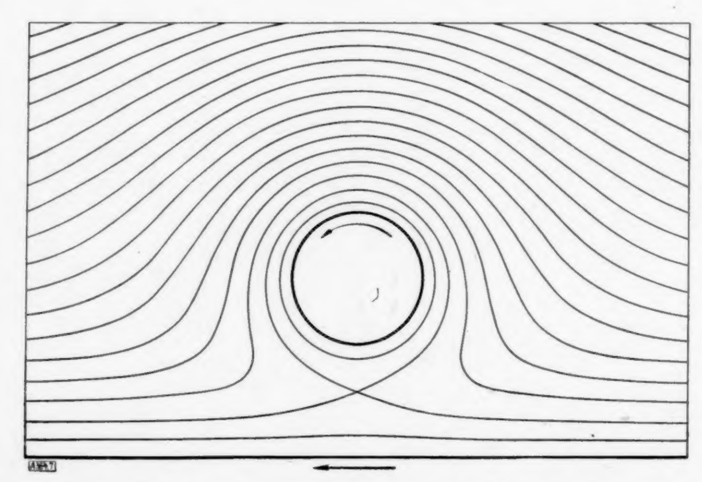


Bild 7. Strömung um einen rotierenden Kreiszylinder in der Nähe einer tangential bewegten ebenen Wand mit $Q=0$.

Zwei Unterfälle sind noch bemerkenswert:

α) Wenn $\beta=0$ wird, so geht der Kreis K_2 in eine im Unendlichen als geschlossen zu betrachtenden gerade Linie über, die entsprechend der Gl. (27) mit der Geschwindigkeit

$$v_2=-v_1\frac{a}{\mathfrak{Sin}\,a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

in sich selbst verschoben wird. Die Stromfunktion nimmt die einfache Form an

$$\Psi=v_1 r_1\frac{(\xi-a)\,\mathfrak{Sin}\,\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi-\cos\eta} \quad . \quad . \quad (34).$$

Für den Doppelpunkt (Umkehrpunkt der Strömung) hat man mit $\eta=\pi$

$$\mathfrak{Sin}\,\xi+\xi-a=0 \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Der Zirkulationspunkt rückt hier ins Unendliche. In dem gezeichneten Beispiel (Bild 7) ist $a=1{,}647$, $\mathfrak{Sin}\,a=2{,}5$, $\xi_1=0{,}7825$, $y_1=0{,}3724\,b$. Für die singuläre Stromlinie ist

$$\frac{1}{v_1 r_1}\Psi=c_1=-0{,}322.$$

β) Wenn β negativ wird, so liegt der Kreis K_2 auf der negativen Seite der Achse $\xi=0$ und ganz außerhalb des Kreises K_1. Die entsprechenden Formeln werden besonders übersichtlich, wenn $\beta=-a$, also beide Kreise einander gleich sind.

Die Bedingung (27) liefert in diesem Falle $v_1=v_2=v$. Beide Kreise müssen also im gleichen Sinne mit gleicher Geschwindigkeit sich drehen, damit $Q=0$ ist (s. Bild 8 auf S. 188). Die Stromfunktion geht über in

$$\Psi=\frac{2\,b\,v}{2\,a+\mathfrak{Sin}\,2\,a}\cdot\frac{\mathfrak{Cof}\,a\cdot\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi-a\,\mathfrak{Sin}\,a\,\mathfrak{Cof}\,\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi-\cos\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Die Stromlinien, die bereits früher gegeben wurden (vgl. I, S. 48), erinnern an die sog. Cassinischen Kurven. Der Doppelpunkt rückt in die Mitte der Zentralen beider Kreise. Die weitere Diskussion ist in der angeführten Arbeit I nachzulesen.

b) Der Fall verschwindender Kraftwirkung. Die Kraft, die auf einen der Zylinder wirkt, verschwindet, wenn

$$\lambda^2\omega_2=-\omega_1, \quad v_2 r_2+v_1 r_1=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

oder die Momente der Umfangsgeschwindigkeiten in bezug auf die Mittelpunkte entgegengesetzt gleich werden. Wir können also setzen

$$v_2=-\frac{\mathfrak{Sin}\,\beta}{\mathfrak{Sin}\,a}v_1.$$

Durch Einsetzung in die zusammengesetzte Stromfunktion $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ erhält man einen Ausdruck von der Form

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha \cdot N \cdot \Psi (\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\eta)}{b\,v_1} = N\left[\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta)\,\xi\,(\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\eta) - \frac{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\beta}{\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)}\,\mathfrak{Sin}\,\xi\right] + B,$$

wo

$$\begin{aligned} B = {} & (\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}^2\alpha\,\mathfrak{Sin}\,(\xi-\beta)\,\mathfrak{Cof}\,(\xi-\alpha)\cos\eta + (\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}^2\beta\,\mathfrak{Sin}\,(\xi-\alpha)\,\mathfrak{Cof}\,(\xi-\beta)\cos\eta \\ & + (\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}^2\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Cof}\,\beta\,\mathfrak{Cof}\,(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Cof}\,\xi + (\alpha-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}^2\beta\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Cof}\,\xi \\ & - \mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)\,[\mathfrak{Sin}\,(\alpha+\beta)\,\mathfrak{Cof}\,\xi + \mathfrak{Sin}\,(\xi-\beta)\,\mathfrak{Cof}\,(\xi-\alpha)\cos\eta \\ & \qquad + \mathfrak{Sin}\,(\xi-\alpha)\,\mathfrak{Cof}\,(\xi-\beta)\cos\eta] \end{aligned}$$

gesetzt ist. Den Ausdruck B kann man umgestalten mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{Sin}\,(\xi-\beta)\,\mathfrak{Cof}\,(\xi-\alpha) + \mathfrak{Sin}\,(\xi-\alpha)\,\mathfrak{Cof}\,(\xi-\beta) &= 2\,\mathfrak{Sin}\,\xi\,\mathfrak{Cof}\,(\xi-\alpha-\beta) - \mathfrak{Sin}\,(\alpha+\beta) \\ &= 2\,\mathfrak{Sin}\,\xi\,\mathfrak{Sin}\,(\xi-\alpha-\beta) + \mathfrak{Sin}\,(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Dann läßt sich die Konstante N abspalten, und es wird

$$B = \cos\eta\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi\,\mathfrak{Cof}\,(\xi-\alpha-\beta)}{\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)}\,N.$$

Schließlich erhalten wir nach einiger Rechnung die Stromfunktion

$$\Psi = v_1\,r_1\left\{\xi\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta) - \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi\,[\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\beta - \mathfrak{Cof}\,(\xi-\alpha-\beta)\cos\eta]}{\mathfrak{Sin}\,(\alpha-\beta)\,(\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\eta)}\right\} \quad \ldots \quad (38).$$

Die Durchflußmenge wird

$$Q = \Psi(\alpha) - \Psi(\beta) = v_1\,r_1\,[(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta) - 1] \quad \ldots \quad (39).$$

Für die auf die Zylinder wirkenden Momente ergeben sich die Werte

$$M_2 = -M_1 = 4\pi\mu\,r_1^2\,\omega_1\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta) \quad \ldots \quad (40).$$

α) Erwähnenswert ist zunächst der Sonderfall $\beta=0$, für den $v_2=0$ wird. Wir erhalten also den Fall der Rotation eines Zylinders in der Nähe einer ruhenden ebenen Wand mit der weiteren Bedingung, daß auch im Unendlichen Ruhe herrschen soll. Dann wird

$$\Psi = v_1\,r_1\left\{\xi\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha - \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi\,[\mathfrak{Cof}\,\alpha - \mathfrak{Cof}\,(\xi-\alpha)\cos\eta]}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,(\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\eta)}\right\} \quad \ldots \quad (41).$$

Das Bild 9 auf Seite 188 zeigt den Verlauf der Stromlinien. Die ausgezeichnete Stromlinie zerfällt in die Gerade $\xi=0$ und eine geschlossene Kurve, die $\xi=0$ berührt. Der Doppelpunkt wird also hier zum Selbstberührungspunkt. Für das widerstehende Moment[4]) findet man

$$M_1 = -4\pi\mu\,r_1^2\,\omega_1\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha = -4\pi\mu\,r_1^2\,\omega_1\sqrt{1-\frac{r_1^2}{b^2}} \quad \ldots \quad (42).$$

Wenn b unendlich groß wird, also die Wand ins Unendliche rückt, so erhalten wir als Reibungsmoment eines rotierenden Zylinders in der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit

$$M_1 = -4\pi\mu\,r_1^2\,\omega_1 \quad \ldots \quad (43).$$

β) Wenn $\beta=-\alpha$ wird, so erhält man $\omega_2=-\omega_1$. Die gleichen Kreise rotieren entgegengesetzt (Bild 10). Dann wird die Stromfunktion und das widerstehende Moment

[4]) Vgl. auch Wilh. Müller: Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, Leipzig 1932, S. 220.

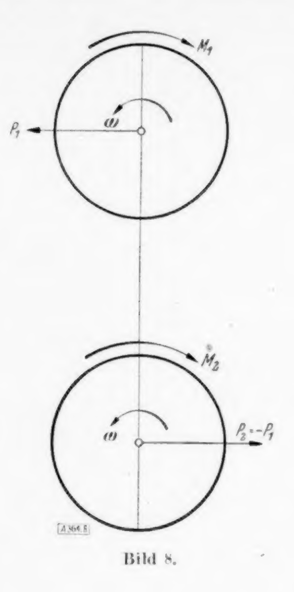


Bild 8.

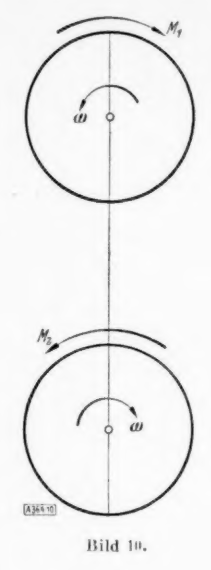


Bild 10.

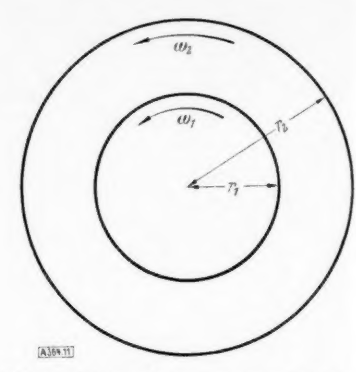
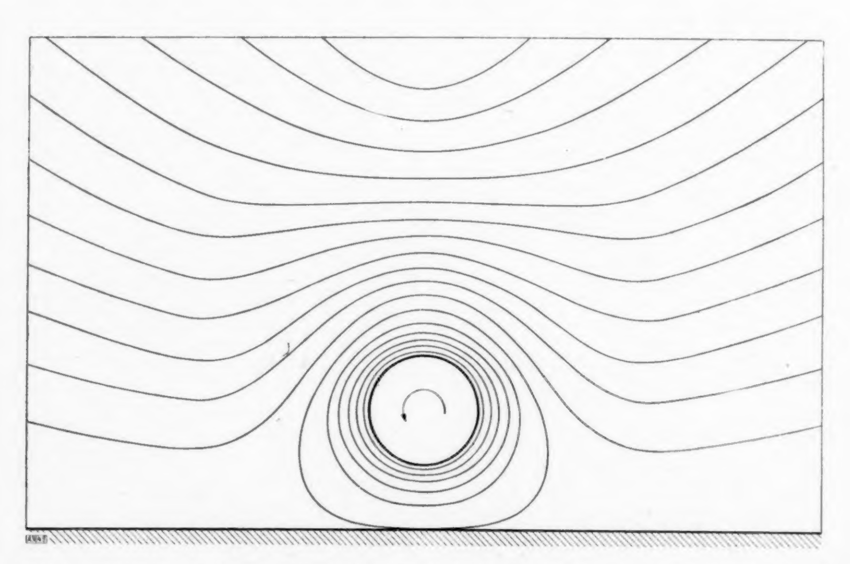


Bild 11. Rotierende konzentrische Zylinder.

Bild 8. Kräfte und Momente bei zwei gleichsinnig rotierenden gleichen Zylindern.

Bild 10. Gegensinnig rotierende gleiche Zylinder.


Bild 9. Strömung um einen rotierenden Kreiszylinder in der Nähe einer ruhenden ebenen Wand.

$$\Psi = v_1\, r_1 \left\{ \xi\, \mathfrak{Ctg}\, 2\,\alpha - \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi\,[\mathfrak{Cof}^2\,\alpha - \mathfrak{Cof}\,\xi\,\cos\eta]}{\mathfrak{Sin}\,2\,\alpha\,(\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\eta)} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (44);$$

$$M_1 = -M_2 = -4\,\pi\,\mu\,r_1^2\,\omega_1 \frac{\mathfrak{Cof}^2\,\alpha}{\alpha + \mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (45).$$

c) Konzentrische Zylinder. Wenn die Zylinder konzentrisch sind, so lassen sich die entsprechenden Ausdrücke z. B. für das Moment durch Grenzübergang bestimmen. Wir haben zunächst

$$(\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha)_{\varepsilon=0} = (\varepsilon\,\mathfrak{Cof}\,\alpha)_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1); \quad \mathfrak{Sin}\,(\alpha - \beta) = \frac{\lambda^2 - 1}{2\,\lambda};$$

$$\mathfrak{Cof}\,(\alpha - \beta) = \frac{\lambda^2 + 1}{2\,\lambda}; \qquad \mathfrak{Tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1};$$

$$(\alpha-\beta)\,\mathfrak{Ctg}\,(\alpha-\beta)-1=\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}-1\,;$$

$$(\alpha-\beta)\,(1+\lambda^2)-2\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\alpha=(\lambda^2+1)\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}-(\lambda^2-1)\,.$$

Damit erhält man für das auf den Zylinder wirkende Moment

$$M_1=-M_2=-4\,\pi\,\mu\,r_1\,r_2\,(\omega_1-\omega_2)\,\frac{\lambda}{\lambda^2-1}=-4\,\pi\,\mu\,(\omega_1-\omega_2)\,\frac{r_1^2\,r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\quad\ldots\quad(46).$$

5. Bemerkungen zur Lösung der ungekürzten Differentialgleichung.

Wenn man die Trägheitsglieder in der hydrodynamischen Differentialgleichung berücksichtigt, so erhält man als Gleichung für die Stromfunktion Ψ der stationären Strömung zunächst in rechtwinkligen Koordinaten

$$\mu\,\Delta\,\Delta\Psi+\varrho\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\frac{\partial\,\Delta\Psi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\frac{\partial\,\Delta\Psi}{\partial x}\right)=0\quad\ldots\ldots\quad(47).$$

Bei Einführung von bipolaren Koordinaten geht die Gleichung über in

$$\mu\,h^4\,\Delta\,\Delta\Psi+\varrho\left[\frac{2h}{b}\left(\sin\eta\,\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}-\mathfrak{Sin}\,\xi\,\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)\cdot\Delta^*\Psi-\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\,\frac{\partial\,\Delta^*\Psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\,\frac{\partial\,\Delta^*\Psi}{\partial\eta}\right]=0\quad\ldots\quad(47\,\mathrm{a})$$

oder ausführlicher

$$\left.\begin{aligned}&\mu\left\{\Delta^*\,\Delta^*\Psi+\frac{4h}{b}\left[(\mathfrak{Cof}\,\xi+\cos\eta)\,\Delta^*\Psi+\mathfrak{Sin}\,\xi\,\frac{\partial\,\Delta^*\Psi}{\partial\xi}+\sin\eta\,\frac{\partial\,\Delta^*\Psi}{\partial\eta}\right]\right\}\\&\quad+\varrho\left[\frac{2h}{b}\left(\sin\eta\,\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}-\mathfrak{Sin}\,\xi\,\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)\cdot\Delta^*\Psi-\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\,\frac{\partial\,\Delta^*\Psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\,\frac{\partial\,\Delta^*\Psi}{\partial\eta}\right]=0\end{aligned}\right\}\quad.\quad(47\,\mathrm{b}).$$

Um eine weitere Annäherung an die exakte Lösung dieser Gleichung zu erhalten, kann man z. B. für den verallgemeinerten Zapfenfall ($0<\beta<\alpha$, $v_2=0$), also bei Rotation des inneren Zylinders die Abweichung der Stromlinien von den Kreisen $\xi=$ konst. als klein vernachlässigen und daher $\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}=0$ setzen. Dann lautet die vereinfachte Differentialgleichung

$$\mu\,h^4\,\Delta\,\Delta\Psi+\varrho\,\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\left(\frac{2\,h}{b}\sin\eta\,\Delta^*\Psi+\frac{\partial\,\Delta^*\Psi}{\partial\eta}\right)=0\quad\ldots\ldots\quad(48).$$

Die Lösung dieser Gleichung dürfte sich für große Reibung am zweckmäßigsten in der Form einer nach Potenzen der Reynoldsschen Zahl $R_e=\frac{b\,v}{\nu}=\frac{b\,v\,\varrho}{\mu}$ fortschreitenden Reihe

$$\Psi=\Psi_0+R_e\,\Psi_1+R_e^2\,\Psi_2+\ldots\quad\ldots\ldots\quad(49)$$

ansetzen lassen, in der Ψ_0 die erste für große Zähigkeit gültige Näherung darstellt, wie sie oben benutzt wurde. Die Bestimmung der Funktionen Ψ_1, Ψ_2, …, die mehrere Schwierigkeiten bietet, ist bisher nicht in Angriff genommen worden. Wenn sie gelingt, etwa für den Fall kleiner Exzentrizität und kleiner Radiendifferenz, dürfte es auch möglich sein, über die zweite, in die Zentrale der beiden Kreise fallende Kraftkomponente, die auch durch Versuche festgestellt wurde, nähere Angaben zu machen und damit z. B. die Theorie der Kräfte am Zapfen weiter zu vervollständigen.

364

Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 Nr. 4 Aug. 1942

Über die Luftkräfte, die auf einen harmonisch schwingenden zweidimensionalen Flügel bei Überschallgeschwindigkeit wirken.

Von *S. v. Borbély* in Kolozsvár (Ungarn).

Bericht des Flugtechnischen Instituts der Technischen Hochschule Berlin.

Die Arbeit enthält einen Beitrag zur Theorie der Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit. Es wird das Problem des harmonisch schwingenden ebenen Flügelprofils behandelt, indem das Strömungsfeld aus gewissen Elementarlösungen der linearisierten Differentialgleichung, die mit Hilfe von Hakenintegralen gewonnen sind, aufgebaut wird.

I. Übersicht.

Vorliegende Arbeit behandelt die Strömung um einen schwingenden Tragflügel, der mit Überschallgeschwindigkeit angeströmt wird. Es werden für den Fall des ebenen Problems (Flügel von unendlich großer Spannweite) unter Voraussetzung von Reibungsfreiheit die Luftkräfte ermittelt, die bei harmonischer Dreh- und Biegeschwingung des Flügels entstehen[1]).

Die mitgeteilte Theorie umfaßt alle Fälle, bei denen die vom Flügel herrührenden Zusatzgeschwindigkeiten u, v an allen Stellen klein gegen die Anströmgeschwindigkeit U_0 sind. Praktisch trifft das zu, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Der Anstellwinkel des Flügels sei klein, die Schwingungsamplitude sei klein, und die Schwingung erfolge langsam (diese Bedingungen treten in gleicher Weise bei der Theorie der Flügelschwingungen in inkompressiblem Medium auf; siehe z. B. Kassner-Fingado, Das ebene Problem der Flügelschwingung, Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 374 bis 387.
2. Das Flügelprofil sei scharfkantig und schlank, so daß die Neigung der Tangenten an die Profilkontur überall klein ist.

Es läßt sich dann zeigen, daß die Strömung, die durch einen mit Überschallgeschwindigkeit angeströmten schwingenden Flügel erzeugt wird, in zwei Anteile zerlegt werden kann[2]):

1. einen stationären Anteil; dieser stellt die Strömung um das gegebene, mit dem mittleren Anstellwinkel der Schwingung gegen die gegebene Anströmgeschwindigkeit fest angestellte Profil dar. Der stationäre Anteil ist also durch die Form, d. h. Wölbung und Dicke, und den Anstellwinkel des Profils bedingt.
2. einen instationären, harmonisch schwingenden Anteil; dieser stellt die Strömung um eine ebene, symmetrisch gegen die Strömung schwingende Platte von derselben Tiefe und derselben Schwingungsfrequenz und -amplitude wie der gegebene Flügel dar. Dieser Anteil ist also von Form und Anstellwinkel des Profils unabhängig.

Die auf den Flügel wirkende Luftkraft erhält man durch Superposition der Kräfte aus beiden Strömungsanteilen. Der erste, stationäre, Strömungsanteil ist durch die Arbeiten von Prandtl, Ackeret, Busemann bereits bekannt.

Den Hauptinhalt der vorliegenden Arbeit bildet die Untersuchung des zweiten, instationären, Strömungsanteils. Die Luftkräfte, die sich bei dieser Strömung ergeben, findet man in Gl. (31) angegeben. Die dort auftretenden Glieder q_λ, r_λ sind Funktionen der Machschen Zahl und einer reduzierten Frequenz, die sich nicht elementar angeben lassen. Die einzelnen Glieder der Luftkraft lassen sich als Massen-, Auftriebskraft usw. deuten, wie es in ähnlicher Weise auch bei Schwingungen in inkompressibler Flüssigkeit möglich ist. Um zu zeigen, wie sich die Kräfte bei Übergang von inkompressibler Flüssigkeit auf Überschallströmung ändern, sind in Tafel I die Luftkraftanteile bei Überschallströmung und bei inkompressibler Flüssigkeit (nach den Angaben von Kassner-Fingado) gegenübergestellt.

Die mathematische Behandlung des Problems geht aus von der Linearisierung der Differentialgleichung. Mit Hilfe von Hakenintegralen bekommt man das Strömungsfeld eines Druckpunktes, der sich stationär oder instationär (harmonisch schwingend) bewegen kann. Aus derartigen Druckpunkten läßt sich das Strömungsfeld um ein Profil aufbauen.

Zum Schluß wird gezeigt, wie sich auch die stationäre Strömung mit Hilfe der Hakenintegrale behandeln läßt.

[1]) Nach Abschluß der Arbeit wurde mir bekannt, daß folgende Arbeit sich mit dem gleichen Thema befaßt: Possio, L'azione aerodinamico sul profilo oscillante alle velocità ultrasonore. Acta Pontif. Acad. Sci. Bd. 1 (1937), Nr. 11, S. 93.

[2]) Diese Zerlegung ist ganz analog der bei inkompressibler Flüssigkeit möglichen.

Vorliegende Arbeit ist auf Anregung des damaligen Leiters des Flugtechnischen Instituts Prof. Dr.-Ing. Herbert Wagner entstanden. Für seine Ratschläge sei ihm auch an dieser Stelle gedankt. Besonderen Dank schulde ich ferner Dr.-Ing. H. Simon, der sich der Mühe unterzogen hat, nicht nur die ganze Arbeit kritisch durchzusehen, sondern sie auch für die Veröffentlichung zu überarbeiten.

II. Bezeichnungen.

x, y	cm	Ortskoordinaten
τ	sec	Zeit
x_a, y_a	cm	Koordinaten der Drehachse des Flügels (Bild 1)
ε		Anstellwinkel des Flügels, d. h. der Profilsehne (Bild 1)
Y	cm	Amplitude der Schlagschwingung
E		Amplitude der Drehschwingung
σ	sec^{-1}	Schlag- und Drehfrequenz
t	cm	Flügeltiefe
$\delta(x)$	cm	die von der Profilsehne aus gemessene Ordinate der Profilkontur (Bild 1)
U, V	cm sec^{-1}	Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit in x- bzw. y-Richtung
u, v	cm sec^{-1}	Komponenten der Störgeschwindigkeit in x- bzw. y-Richtung
U_0	cm sec^{-1}	Anströmgeschwindigkeit der Flüssigkeit
φ	cm^2 sec^{-1}	Geschwindigkeitspotential der Störgeschwindigkeiten
c	cm sec^{-1}	Schallgeschwindigkeit
ϱ	kg sec^2 cm^{-4}	Dichte
p	kg cm^{-2}	Druck
$\varkappa$		Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen
P		Auftriebskraft
M		Moment der Luftkräfte um die Flügelvorderkante, im mathematisch positiven Sinne
$\vartheta = \arcsin \frac{c}{U_0}$		Machscher Winkel
$\omega = \frac{\sigma t}{U_0 \cos^2 \vartheta}$		reduzierte Frequenz

Querstriche ($\bar{x}$, $\bar{\xi}$ usw.) bedeuten im mathematischen Teil dimensionslose Variable (Koordinaten).

Indizes: $_{fl}$ = am Flügel
$_{o}$, $_{u}$ = oben, unten
$_{0}$ bezieht sich auf die ungestörte Strömung vor dem Flügel.

III. Voraussetzungen und Annahmen.

Wir betrachten eine reibungsfreie unendlich ausgedehnte zweidimensionale Flüssigkeit (ebenes Problem), die vom Unendlichen her mit gleichmäßiger Geschwindigkeit gegen einen Flügel anströmt; vom Einfluß der Schwere auf die Strömung wollen wir absehen. Die Geschwindigkeit der Anströmung sei größer als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls in der betreffenden Flüssigkeit.

Um die Behandlung der Strömungsvorgänge zu vereinfachen, betrachten wir den mathematischen Grenzfall, daß das gleichmäßige Geschwindigkeitsfeld der Anströmung durch den Flügel an allen Stellen nur sehr (unendlich) wenig geändert wird, d. h. daß die durch den Flügel erzeugten Zusatzgeschwindigkeiten u, v sehr (unendlich) klein gegen die Anströmgeschwindigkeit U_0 sind. Dazu ist erforderlich, daß

1. der Anstellwinkel des Flügels sehr (unendlich) klein ist und daß die Bewegungsgeschwindigkeit des Flügels in Richtung senkrecht zur Anströmgeschwindigkeit sehr (unendlich) klein gegen die Anströmgeschwindigkeit ist[3]).
2. die Neigung der Profiltangenten gegen die Anströmrichtung überall sehr (unendlich) klein ist, d. h. also, daß das Profil scharfkantig und schlank ist.

In einer Überschallströmung ist die Zusammendrückung des strömenden Mediums für die Strömungsvorgänge wesentlich. Diese Zusammendrückung ist im Gebiet der Strömung im allgemeinen ein stetiger Vorgang, d. h. Druck p und Dichte ϱ ändern sich von Stelle zu Stelle allmählich, und zwar adiabatisch nach der Gleichung $p = a \cdot \varrho^{\varkappa}$. Der Vorgang verläuft

[3]) Es sei bemerkt, daß diese Voraussetzungen auch bei der Tragflügeltheorie in inkompressiblem Medium üblich sind.

ohne Entropievermehrung und ist daher umkehrbar. Es kann jedoch gewisse Unstetigkeitsstellen geben, an denen „Verdichtungsstöße" auftreten, d. h. an denen Druck und Dichte plötzlich von einem Wert $_0$ auf einen Wert $_1$ übergehen. Da diese Verdichtungsstöße nicht adiabatisch, sondern unter Entropievermehrung verlaufen, sind sie nicht umkehrbar. Es gilt für sie die Gleichung

$$\frac{1}{\varkappa-1}\left(\frac{p_1}{\varrho_1}-\frac{p_0}{\varrho_0}\right)=\frac{p_0+p_1}{2}\,\frac{\varrho_1-\varrho_0}{\varrho_0\,\varrho_1}\;^{4)}.$$

Entwickelt man nun das Dichteverhältnis ϱ_1/ϱ_0 für Stoßvorgänge und adiabatische Vorgänge nach Potenzen von $(p_1-p_0)/p_0=\Delta p/p_0$, so erhält man in beiden Fällen:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0}=1+\frac{1}{\varkappa}\frac{\Delta p}{p_0}-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa^2}\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2+\cdots,$$

d. h. beide Verdichtungsvorgänge stimmen bis zu Gliedern zweiter Ordnung einschließlich überein. Da in dem von uns betrachteten Grenzfall sehr kleiner Zusatzgeschwindigkeiten die Glieder höherer Ordnung gegen die linearen Glieder verschwinden, so besteht kein Unterschied zwischen adiabatischer und Stoßverdichtung; wir können also überall adiabatische Zustandsänderungen annehmen.

Aus der eben angestellten Betrachtung folgt ferner, daß wir die Strömung im ganzen Gebiet als rotationsfrei ansehen dürfen. Bewegt sich nämlich mit dem strömenden Medium eine beliebige geschlossene Kurve, so gilt für die zeitliche Änderung der Zirkulation Γ längs dieser Kurve

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-\oint\frac{dp}{\varrho}\;^{5)},$$

wobei das Integral längs der Kurve zu nehmen ist. Treten nur adiabatische Zustandsänderungen in der Strömung auf, so verschwindet dieses Integral; sind auch Stoßvorgänge vorhanden, so verschwindet es nicht mehr, aber seine Größenordnung ist nach dem Vorangehenden $(\Delta p/p_0)^3$. Die Zirkulationsänderungen verschwinden also in dem von uns betrachteten Grenzfall, und da die Parallelströmung vor dem Flügel rotationsfrei ist, muß die Bewegung im ganzen Strömungsgebiet wirbelfrei bleiben.

Schließlich sei noch vorausgesetzt, daß der Flügel eine harmonisch schwingende Dreh- und Schlagbewegung senkrecht zur Anströmrichtung ausführe, und zwar schon seit sehr (unendlich) langer Zeit, so daß hinter dem Flügel eine in x-Richtung unbegrenzte periodische Strömung vorhanden sei.

IV. Die linearisierte Differentialgleichung.

Nach unseren Voraussetzungen lassen sich die Geschwindigkeiten U, V, der Druck p und die Dichte ϱ in folgender Form darstellen:

$$\left.\begin{aligned} U(x,y;\tau)&=U_0+u(x,y;\tau) & \varrho&=\varrho_0+\varrho_1(x,y;\tau)\\ V(x,y;\tau)&=v(x,y;\tau) & p&=p_0+p_1(x,y;\tau)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(1),$$

wobei u/U_0, v/U_0, ϱ_1/ϱ_0, p_1/p_0 kleine Größen sind.

Für den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte $p=a\cdot\varrho^\varkappa$ läßt sich dann schreiben:

$$p=a\,\varrho_0+a\,\varkappa\,\varrho_0^{\varkappa-1}\cdot\varrho_1=p_0+c^2\cdot\varrho_1\quad\ldots\ldots\quad(2).$$

Dabei bedeutet $c=\sqrt{\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_0}=\sqrt{a\,\varkappa\,\varrho_0^{\varkappa-1}}$ die zur ungestörten Strömung U_0 gehörige Schallgeschwindigkeit.

Führen wir diese linearisierten Ausdrücke in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\tau}+\varrho\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right)+U\frac{\partial\varrho}{\partial x}+V\frac{\partial\varrho}{\partial y}=0\quad\ldots\ldots\quad(3)$$

und die beiden Eulerschen Gleichungen

[4] Siehe z. B. Ackeret, Gasdynamik in Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. VII, Berlin 1927, S. 325.
[5] Siehe Ackeret, a. a. O., S. 294.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \tau}+U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\ \frac{\partial V}{\partial \tau}+U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ein und vernachlässigen Glieder zweiter und höherer Ordnung, so gehen die Differentialgleichungen über in

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial \tau}+\varrho_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+U_0\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}=0 \quad (3a)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau}+U_0\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{c^2}{\varrho_0}\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}=0\\ \frac{\partial v}{\partial \tau}+U_0\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{c^2}{\varrho_0}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \quad (4a).$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen ϱ_1, so erhält man

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}+U_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial \tau\,\partial x}\right)+(U_0^2-c^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-c^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

woraus schließlich mit Hilfe der Bedingung der Wirbelfreiheit

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad (5)$$

für die y-Komponente der Strömungsgeschwindigkeit die Differentialgleichung folgt:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}+2\,U_0\frac{\partial^2 v}{\partial \tau\,\partial x}+(U_0^2-c^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \quad (6).$$

V. Randbedingungen; Zerlegung des Problems.

Wenn wir die Randbedingungen, denen die Lösung der gewonnenen Differentialgleichung (6) genügen muß, mathematisch formulieren, so ergibt sich in unserem Falle:

1. Im Bereich vor dem Flügel muß, da in einer Überschallströmung sich Störungen nur stromabwärts auswirken können, die ungestörte Parallelströmung vorhanden sein, d. h. für $x < 0$: $v = 0$.
2. Im Bereich des Flügels muß die Strömung am Flügel anliegen, d. h. in der Normalrichtung zum Flügel muß die Geschwindigkeitskomponente der Strömung mit der des Flügels übereinstimmen. Wegen der Voraussetzung der (unendlich) kleinen Neigung der Flügelkontur ist die Normalkomponente mit der Vertikalkomponente V identisch. Wenn die Lage des Flügels in der Form $y = g(x, \tau)$ (im Bereich $0 \ldots x \ldots t$) gegeben ist, so muß also am Ort des Flügels, d. i., bei unserer Beschränkung auf die linearen Glieder, für $y = 0$ (und $0 \ldots x \ldots t$) gelten
$$v=\frac{d g}{d \tau}=\frac{\partial g}{\partial \tau}+U_0\frac{\partial g}{\partial x} \quad (7).$$
3. Im Bereich hinter dem Flügel ($x > t$, $y = 0$) muß die Strömung entsprechend der Schwingungsfrequenz des Flügels periodisch (zeitlich) wechseln.

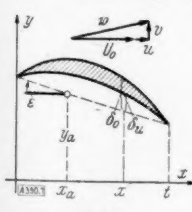


Bild 1.

Wir wollen nun zeigen, daß das Strömungsproblem in zwei Teilprobleme, ein stationäres und ein instationäres, zerlegt werden kann.

Wir betrachten die Schwingung des Flügels. Sie sei als Summe einer Schlagschwingung und einer Drehschwingung um eine Achse mit der Abszisse x_a (siehe Bild 1) gegeben. Die Ordinate eines beliebigen Flügelpunktes mit der Abszisse x hat, wenn wir nur die Glieder 1. Ordnung berücksichtigen, den Wert:

$$g_{o,u}(x) = y_a - (x - x_a)\,\varepsilon + \delta_{o,u}(x) \quad (8).$$

Der Ausschlag y_a und der Drehwinkel ε sind dabei harmonische (gegeneinander phasenverschobene) Funktionen der Zeit mit der Schwingungsfrequenz σ:

$$\left.\begin{aligned}y_a &= Y_0 + Y e^{i\sigma\tau}\ ^{6)}\\ \varepsilon &= E_0 + E e^{i\sigma(\tau-\tau_0)}\end{aligned}\right\} \quad (9).$$

[6] Wir verwenden die bekannte komplexe Schreibweise für die harmonische Schwingung; will man auf die reelle Schreibweise übergehen, so hat man entweder den Real- oder den Imaginärteil für sich zu nehmen.

Führen wir diese Ausdrücke in die Randbedingung 2 ein, so lautet sie:

für $0 \ldots x \ldots t,\ y=0$:

$$v=\left(\frac{\partial}{\partial \tau}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[Y e^{i\sigma\tau}-(x-x_a)\,E\,e^{i\sigma(\tau-\tau_0)}\right]+U_0\frac{\partial}{\partial x}\left[Y_0-(x-x_a)\,E_0+\delta_{o,u}(x)\right] \quad (10).$$

Hierin stellt der erste Teil

$$v_1=\left(\frac{\partial}{\partial \tau}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[Y e^{i\sigma\tau}-(x-x_a)\,E\,e^{i\sigma(\tau-\tau_0)}\right]=\frac{d y_1}{d\tau} \quad (10a)$$

die Geschwindigkeitsverteilung an einer um die Nullage schwingenden unendlich dünnen ebenen Platte dar, der zweite

$$v_2=U_0\frac{\partial}{\partial x}\left[Y_0-(x-x_a)\,E_0+\delta_{o,u}(x)\right] \quad (10b)$$

die Geschwindigkeitsverteilung an dem gegebenen, aber in der Mittellage fest angestellten Profil. Es liegt daher nahe, an eine Zerlegung des Problems in die beiden Teilprobleme der schwingenden Platte und des stationären Profils zu denken. Da die Differentialgleichung für v linear ist und somit das Superpositionsprinzip gilt, so steht einer Zerlegung nichts im Wege, falls auch die übrigen Randbedingungen dabei erfüllt werden können. Nun ist in beiden Fällen im Bereich vor dem Flügel $v=0$; hinter dem Flügel ist bei stationärer Strömung ebenfalls $v=0$, während bei der schwingenden Platte dort die Strömung periodisch sein muß. Man sieht also, daß bei Überlagerung der beiden Strömungen wirklich alle Randbedingungen der Gesamtströmung erfüllt werden. Die Zerlegung ist also zulässig.

Wir beschäftigen uns zunächst und hauptsächlich mit dem Problem der dünnen, nicht angestellten, schwingenden Platte.

VI. Die Elementarlösung und der Lösungsansatz.

Eine Partikulärlösung der Differentialgleichung (6) ist die Funktion

$$e^{i\sigma\tau+i\mu x+i\nu y} \quad (\sigma,\mu \text{ reell}),$$

wenn ν die aus der charakteristischen Gleichung folgende Bedingung erfüllt:

$$\nu=\frac{1}{c}\sqrt{\sigma^2+2U_0\mu\sigma+(U_0^2-c^2)\mu^2} \quad (11a).$$

Da die Differentialgleichung linear ist, darf man die Lösung mit einem beliebigen, von x, y, τ unabhängigen Faktor multiplizieren und verschiedene Lösungen überlagern. So kann man aus der Partikulärlösung folgende Elementarlösung bilden

$$v_e(x,y;\tau)=\frac{e^{i\sigma\tau}}{2\pi i}\left[\int_{\curvearrowright}\frac{e^{i\mu(x-x_1)+i\nu y}}{\mu+\frac{\sigma}{U_0-c}}\,d\mu+\int_{\curvearrowright}\frac{e^{i\mu(x-x_1)+i\nu y}}{\mu+\frac{\sigma}{U_0+c}}\,d\mu\right] \quad (11b).$$

Die Hakenintegrale, die in dieser Lösung auftreten, haben die Besonderheit, sich an gewissen Stellen diskontinuierlich zu ändern. So ist z. B. längs der x-Achse[7]):

für $x<x_1$: $v_e(x,0;\tau)=0$,

für $x>x_1$: $v_e(x,0;\tau)=e^{i\sigma\tau}\left[e^{-i\frac{\sigma}{U_0-c}(x-x_1)}+e^{-i\frac{\sigma}{U_0+c}(x-x_1)}\right]$,

d. h. auf der x-Achse herrscht links von der Stelle x_1 die ungestörte Parallelströmung, während rechts von x_1 eine zeitlich harmonische Störgeschwindigkeit v vorhanden ist. Untersucht man den ganzen Bereich der xy-Ebene, so findet man, daß der Bereich, in dem die Geschwindigkeit v von Null verschieden ist, einen Keil mit der Spitze in x_1 darstellt (Bild 2). Die Elementarlösung stellt also eine gewisse Störung der Parallelströmung dar, die vom Punkt x_1 ausgeht.

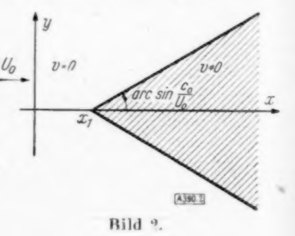


Bild 2.

Um die Strömung um die schwingende Platte darzustellen, benutzen wir eine Verteilung derartiger Elementarstörungen über die Flügeltiefe, und zwar machen wir folgenden Ansatz:

[7]) Siehe darüber auch Abschnitt VII.

$$\left.\begin{aligned} v(x,y;\tau)=\frac{e^{i\sigma\tau}}{2\pi i}\Bigg[& C_1\int\limits_{\curvearrowright -\mu_1}\frac{e^{i\mu x+i\nu y}}{\mu+\mu_1}\,\mathrm{d}\mu+C_2\int\limits_{\curvearrowright -\mu_2}\frac{e^{i\mu x+i\nu y}}{\mu+\mu_2}\,\mathrm{d}\mu \\ & +\int\limits_{x_1=0}^{t} f(x_1)\int\limits_{\curvearrowright -\mu_1}\frac{e^{i\mu(x-x_1)+i\nu y}}{\mu+\mu_1}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}x_1+\int\limits_{x_1=0}^{t} f(x_1)\int\limits_{\curvearrowright -\mu_2}\frac{e^{i\mu(x-x_1)+i\nu y}}{\mu+\mu_2}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}x_1\Bigg]\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (12),$$

wobei

$$\mu_1=\frac{\sigma}{U_0-c}\,;\qquad \mu_2=\frac{\sigma}{U_0+c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12\text{a}).$$

Die Stärke der Störung an der Vorderkante, C_1 bzw. C_2, sowie die Verteilungsfunktion $f(x_1)$ sind dabei vorläufig noch unbestimmt. Wie leicht ersichtlich[8]), liefern für $y=0$ die Hakenintegrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\curvearrowright -\mu_{1,2}}\frac{e^{i\mu(x-x_1)}}{\mu+\mu_{1,2}}\,\mathrm{d}\mu=\begin{Bmatrix} e^{-i\mu_{1,2}(x-x_1)}, & x-x_1>0 \\ 0 & , \; x-x_1<0\end{Bmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

und man erkennt, daß auf der x-Achse vor dem Flügel $v=0$, hinter dem Flügel v zeitlich (und örtlich) periodisch ist. Die Randbedingungen 1 und 3 des § V sind daher erfüllt. Es fehlt nun noch die Randbedingung 2, die im Bereich des Flügels $0\ldots x\ldots t$ gilt. Schreibt man sie für die in Gl. (10a) gegebene Schwingungsform des Flügels auf und berücksichtigt, daß sich für $y=0$ die Geschwindigkeit v der Gl. (12) wegen (13) vereinfacht, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}\tau}=i\sigma\left[Y e^{i\sigma\tau}-\left(\frac{U_0}{i\sigma}-x_a\right)E\,e^{i\sigma(\tau-\tau_0)}-x\,E\,e^{i\sigma(\tau-\tau_0)}\right]&=v(x,0;\tau)\\ =e^{i\sigma\tau}\Bigg[C_1 e^{-i\mu_1 x}+\int\limits_{x_1=0}^{x} f(x_1)\,e^{-i\mu_1(x-x_1)}\,\mathrm{d}x_1 & \\ +C_2 e^{-i\mu_2 x}+\int\limits_{x_1=0}^{x} f(x_1)\,e^{-i\mu_2(x-x_1)}\,\mathrm{d}x_1\Bigg].&\end{aligned}$$

Diese Bedingung läßt sich mit dem Ansatz

$$f(x_1)=\alpha+\beta x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

erfüllen; sie geht damit über in:

$$\begin{aligned} i\sigma\left[Y-\left(\frac{U_0}{i\sigma}-x_a\right)E\,e^{-i\sigma\tau_0}-E\,e^{-i\sigma\tau_0}\cdot x\right] \\ =C_1 e^{-i\mu_1 x}+\left[\frac{\alpha}{i\mu_1}-\frac{\beta}{(i\mu_1)^2}+\frac{\beta x}{i\mu_1}\right]-e^{-i\mu_1 x}\left[\frac{\alpha}{i\mu_1}-\frac{\beta}{(i\mu_1)^2}\right] \\ +C_2 e^{-i\mu_2 x}+\left[\frac{\alpha}{i\mu_2}-\frac{\beta}{(i\mu_2)^2}+\frac{\beta x}{i\mu_2}\right]-e^{-i\mu_2 x}\left[\frac{\alpha}{i\mu_2}-\frac{\beta}{(i\mu_2)^2}\right],\end{aligned}$$

d. h. die Konstanten C_1, C_2, α, β müssen die Bedingungen erfüllen:

$$\begin{gathered} C_1-\left(\frac{\alpha}{i\mu_1}-\frac{\beta}{(i\mu_1)^2}\right)=0\,;\qquad C_2-\left(\frac{\alpha}{i\mu_2}-\frac{\beta}{(i\mu_2)^2}\right)=0\,; \\ \alpha\left(\frac{1}{i\mu_1}+\frac{1}{i\mu_2}\right)+\beta\left(\frac{1}{\mu_1^2}+\frac{1}{\mu_2^2}\right)=i\sigma\left[Y-\left(\frac{U_0}{i\sigma}-x_a\right)E\,e^{-i\sigma\tau_0}\right], \\ \beta\left(\frac{1}{i\mu_1}+\frac{1}{i\mu_2}\right)=-i\sigma\,E\,e^{-i\sigma\tau_0}.\end{gathered}$$

Ihre Größe bestimmt sich daraus zu

[8]) Siehe z. B. Rothe-Ollendorff-Pohlhausen: Funktionentheorie. Berlin (1931); Breisig: Theoretische Telegraphie, 2. Auflage. Braunschweig 1924.

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= -i\sigma E e^{-i\sigma\tau_0}\frac{U_0^2+c^2}{2U_0^2}-\frac{\sigma^2}{2U_0}\left[Y-\left(\frac{U_0}{i\sigma}-x_a\right)Ee^{-i\sigma\tau_0}\right]\\
\beta &= -\frac{\sigma^2}{2U_0}Ee^{-i\sigma\tau_0}\\
C_1 &= -Ee^{-i\sigma\tau_0}\frac{c}{2U_0^2}(U_0^2-c^2)+\frac{i\sigma}{2U_0}(U_0-c)\left[Y-\left(\frac{U_0}{i\sigma}-x_a\right)Ee^{-i\sigma\tau_0}\right]\\
C_2 &= +Ee^{-i\sigma\tau_0}\frac{c}{2U_0^2}(U_0^2-c^2)+\frac{i\sigma}{2U_0}(U_0+c)\left[Y-\left(\frac{U_0}{i\sigma}-x_a\right)Ee^{-i\sigma\tau_0}\right]
\end{aligned}\right\}\quad \ldots \quad (15),$$

wobei zum Zwecke einer späteren Umformung hier schon die Gleichung vermerkt sei:

$$\left.\begin{aligned}
&C_1+\frac{\beta(x-\xi)}{i\sigma}(U_0-c)+C_2+\frac{\beta(x-\xi)}{i\sigma}(U_0+c)\\
&=i\sigma\left[Y-\left(\frac{U_0}{i\sigma}+[x-\xi-x_a]\right)Ee^{-i\sigma\tau_0}\right]=e^{-i\sigma\tau}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\,g_1}{\mathrm{d}\,\tau}\right)_{x-\xi}
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots \quad (16).$$

Nachdem die Konstanten α, β, C_1, C_2 bestimmt sind, ist die Geschwindigkeit $v(x, y; \tau)$ (Gl. 12) nunmehr bekannt. Wir wollen sie jedoch in etwas anderer Form schreiben, da dies zur praktischen Auswertung der Hakenintegrale zweckmäßiger ist. Wir führen eine neue Integrationsveränderliche ω ein durch die Gleichung

$$\mu=\frac{\sigma c}{U_0^2-c^2}\omega-\frac{U_0\sigma}{U_0^2-c^2}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17\text{a})$$

und setzen

$$\frac{\sigma c}{U_0^2-c^2}x=\overline{x};\qquad \frac{\sigma}{\sqrt{U_0^2-c^2}}y=\overline{y}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17\text{b}).$$

Dann können wir schreiben

$$\int\limits_{\overset{\frown}{-\mu_{1,2}}}\frac{e^{i\mu x+i\nu y}}{\mu+\mu_{1,2}}\,\mathrm{d}\,\mu=e^{-i\overline{x}\frac{U_0}{c}}\int\limits_{\overset{\frown}{-1,+1}}\frac{e^{i\overline{x}\omega+i\overline{y}\sqrt{\omega^2-1}}}{\omega\pm1}\,\mathrm{d}\,\omega=e^{-i\overline{x}\frac{U_0}{c}}\cdot\psi(\overline{x},\overline{y};\pm1)\quad \ldots \quad (18).$$

Führen wir weiter im äußeren Integral des Ausdruckes für v die dimensionslosen Größen

$$\frac{\sigma c}{U_0^2-c^2}\cdot\begin{Bmatrix}x_1\\ t\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{t}\end{Bmatrix}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17\text{c})$$

ein, so erhalten wir schließlich für die Geschwindigkeit die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}
&v(\overline{x},\overline{y};\tau)\cdot 2\pi i\,e^{-i\sigma\tau+i\overline{x}\frac{U_0}{c}}=C_1\cdot\psi(\overline{x},\overline{y};+1)+C_2\cdot\psi(\overline{x},\overline{y};-1)\\
&+\frac{U_0^2-c^2}{\sigma c}\int\limits_{\overline{x}_1=0}^{\overline{t}}\left(\alpha+\beta\frac{U_0^2-c^2}{\sigma c}\overline{x}_1\right)e^{i\frac{U_0}{c}\overline{x}_1}[\psi(\overline{x}-\overline{x}_1,\overline{y};+1)+\psi(\overline{x}-\overline{x}_1,\overline{y};-1)]\,\mathrm{d}\,\overline{x}_1
\end{aligned}\right\}\quad . \quad (19).$$

VII. Zurückführung auf Besselfunktionen.

In dem Hakenintegral

$$\psi(\overline{x},\overline{y};+1)=\int\limits_{\overset{\frown}{(-1,0)}}\frac{e^{i\overline{x}\omega+i\overline{y}\sqrt{\omega^2-1}}}{\omega+1}\,\mathrm{d}\,\omega\quad \ldots\ldots \quad \text{siehe Gl. (18)}$$

ist der Integrand eine mehrdeutige Funktion von ω [9]; die Riemannsche Fläche des Integranden ist zweiblättrig, im Unendlichen schlicht und besitzt die Verzweigungspunkte $(\pm 1, 0)$.

[9]) Es sei bemerkt, daß wir uns im folgenden auf positive Werte $\overline{y}$, d. h. die obere Halbebene der Strömung, beschränken.

Wir führen den Integrationsweg H, der sich über die ganze reelle Achse erstreckt, so, daß die Verzweigungspunkte nach Bild 3 umgangen werden. Wählen wir den Zweig der Wurzel, der negativ wird, wenn ω reell und >1 ist, so geht der Exponent im Integranden mit wachsendem Absolutwert von $\omega = R \cdot e^{i\varphi}$ asymptotisch gegen den Wert

$$-(\bar{x}-\bar{y})\, R\,(\sin\varphi - i\cdot\cos\varphi);$$

der Realteil dieses Ausdrucks ist im Falle $\bar{x}-\bar{y}>0$ in der oberen ω-Halbebene, d. h. für $\sin\varphi>0$, negativ, im Falle $\bar{x}-\bar{y}<0$ in der unteren Halbebene. Daraus folgt, daß das Integral

$$\int \frac{e^{i\bar{x}+i\bar{y}\sqrt{\omega^2-1}}}{\omega+1}\,\mathrm{d}\,\omega$$

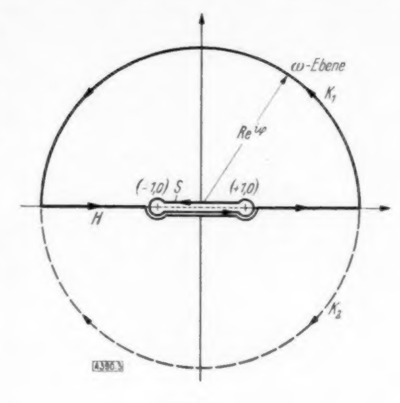


Bild 3.

über den Halbkreis K_1 der oberen bzw. K_2 der unteren Halbebene (für $\bar{x}-\bar{y}>0$ bzw. $\bar{x}-\bar{y}<0$, siehe Bild 3) im Grenzfalle $R\to\infty$ gegen den Wert Null geht. Wir können das Hakenintegral daher durch Zufügung des oberen bzw. unteren Halbkreisintegrals zum geschlossenen Umlaufintegral ergänzen, ohne seinen Wert zu ändern.

Da im Fall $\bar{x}-\bar{y}<0$ im Innern des Integrationsbereiches keine Singularität liegt, ist nach dem Cauchyschen Satz der Wert des Umlauf- und damit auch des Hakenintegrals gleich Null.

$$1.\ \text{für } \bar{x}-\bar{y}<0 \qquad \psi(\bar{x},\bar{y};+1) = \int\limits_{\substack{\to\\(-1,\,0)}} = \lim\Big(\int\limits_{\substack{\to\\(-1,\,0)}} + \int\limits_{(K_2)}\Big) = 0\,.$$

Im andern Falle dagegen liegen im Innern des Integrationsbereiches Singularitäten; da diese nur auf dem von $(-1{,}0)$ bis $(+1{,}0)$ laufenden Verzweigungsschnitt liegen, dürfen wir den Integrationsweg auf den Umlauf S um den Verzweigungsschnitt zusammenziehen (Bild 3), ohne daß dadurch der Wert des Integrals geändert wird.

$$2.\ \text{für } \bar{x}-\bar{y}>0 \qquad \psi(\bar{x},\bar{y};+1) = \int\limits_{\substack{\to\\(-1,\,0)}} = \lim\Big(\int\limits_{\substack{\to\\(-1,\,0)}} + \int\limits_{(K_1)}\Big) = \oint\limits_{(S)}\,.$$

Wir zerlegen nun den Integrationsweg in zwei Teile; den einen Teil bildet ein Kreis vom Radius ε um den Punkt $(-1{,}0)$, den anderen Teil bildet der Rest des Umlaufweges.

$$\psi(\bar{x},\bar{y},+1) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{e^{i\bar{x}(-1+\varepsilon e^{i\varphi})-i\bar{y}\sqrt{(-1+\varepsilon e^{i\varphi})^2-1}}}{\varepsilon\, e^{i\varphi}}\, i\,\varepsilon\, e^{i\varphi}\,\mathrm{d}\,\varphi + \oint\limits_{-1+\varepsilon,+1,-1+\varepsilon} \frac{e^{i\bar{x}\omega-i\bar{y}\sqrt{\omega^2-1}}}{\omega+1}\,\mathrm{d}\,\omega\right].$$

Der erste Teil stellt das $2\pi i$-fache Residuum des Integranden am Punkte $(-1,0)$ dar und hat den Wert $2\pi i\, e^{-i\bar{x}}$; der zweite Teil ist der Cauchysche Hauptwert des Integrals.

$$\psi(\bar{x},\bar{y};+1) = 2\pi i\, e^{-i\bar{x}} + \oint\limits_{-1,+1,-1} \frac{e^{i\bar{x}\omega-i\bar{y}\sqrt{\omega^2-1}}}{\omega+1}\,\mathrm{d}\,\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Der Hauptwert läßt sich durch die Substitution $\omega=\cos t$ überführen in:

$$\oint\limits_{-1,+1,-1} \frac{e^{i\bar{x}\omega-i\bar{y}\sqrt{\omega^2-1}}}{\omega+1}\,\mathrm{d}\,\omega = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\bar{x}\cos t+\bar{y}\sin t}}{1+\cos t}\sin t\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{-i\bar{x}+\bar{y}\sin t}\,\frac{e^{i\bar{x}(1+\cos t)}}{1+\cos t}\sin t\,\mathrm{d}\,t\,.$$

Da nun

$$\frac{e^{i\bar{x}(1+\cos t)}}{1+\cos t} = i\int\limits_{\xi=\bar{y}}^{\bar{x}} e^{i\xi(1+\cos t)}\,\mathrm{d}\,\xi + \frac{e^{i\bar{y}(1+\cos t)}}{1+\cos t}$$

ist, so erhält man:

$$= -i\,e^{-i\bar{x}} \int_{\xi=\bar{y}}^{\bar{x}} e^{i\xi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\xi\cos t + \bar{y}\sin t} \cdot \sin t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\xi + e^{-i(\bar{x}-\bar{y})} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\bar{y}\cos t + \bar{y}\sin t}}{1+\cos t} \sin t \cdot \mathrm{d}t.$$

Das innere Integral des ersten Gliedes hat den Wert [10]):

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\xi\cos t + \bar{y}\sin t} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\partial}{\partial y} 2\pi J_0\left(\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}\right) = 2\pi\bar{y}\frac{J_1\left(\sqrt{\xi^2-y^2}\right)}{\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}},$$

wobei J_0, J_1 Besselsche Funktionen erster Art bedeuten; damit ist:

$$\left.\begin{aligned} \oint_{-1,+1,-1} \frac{e^{i\bar{x}\omega - i\bar{y}\sqrt{\omega^2-1}}}{\omega+1}\mathrm{d}\omega = &-2\pi i\bar{y}e^{-i\bar{x}} \int_{\xi=\bar{y}}^{\bar{x}} e^{i\xi}\frac{J_1\left(\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}\right)}{\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}}\mathrm{d}\xi \\ &- e^{-i(\bar{x}-\bar{y})}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{i\bar{y}(\cos t - i\sin t)}}{1+\cos t}\sin t\cdot\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \quad (20).$$

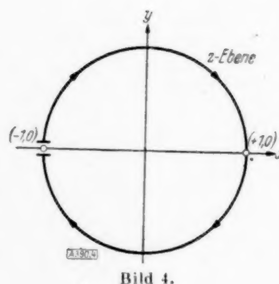


Bild 4.

Das zweite Integral kann durch die Substitution $\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ oder $z = \cos t - i\cdot\sin t$ in ein Integral über einen (offenen) Kreis K der z-Ebene (Bild 4) umgewandelt werden:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{i\bar{y}(\cos t - i\sin t)}}{1+\cos t}\sin t\,\mathrm{d}t = -\oint_{(K)}\frac{e^{i\bar{y}t}\cdot(z-1)}{z(z+1)}\mathrm{d}z.$$

Da der Integrand Residuen an den Stellen $(-1, 0)$ und $(0, 0)$ besitzt, ergibt sich der Wert des Integrals zu:

$$= -2\pi i\left[-\mathrm{Res.}(0,0) - \frac{1}{2}\mathrm{Res.}(-1,0)\right]$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{i\bar{y}(\cos t - i\sin t)}}{1+\cos t}\sin t\cdot\mathrm{d}t = -2\pi i\left(1-e^{-\bar{y}i}\right) \quad (21).$$

Somit erhält man nach Gl. (19), (20) und (21):

für $\bar{x}-\bar{y}>0$

$$\psi(\bar{x},\bar{y};+1) = 2\pi i\,e^{-i(\bar{x}-\bar{y})} - 2\pi i\,\bar{y}\,e^{-i\bar{x}}\int_{\xi=\bar{y}}^{\bar{x}} e^{i\xi}\frac{J_1\left(\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}\right)}{\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}}\mathrm{d}\xi.$$

In ganz entsprechender Weise läßt sich das Hakenintegral $\psi(\bar{x},\bar{y};-1)$ behandeln; man erhält schließlich das Ergebnis:

$$1.\quad \bar{x}-\bar{y}<0 \qquad \psi(\bar{x},\bar{y};\pm 1) = 0 \quad (22\text{a}),$$

$$2.\quad \bar{x}-\bar{y}>0 \qquad \psi(\bar{x},\bar{y};\pm 1) = 2\pi i\,e^{\mp i(\bar{x}-\bar{y})} - 2\pi i\,\bar{y}\,e^{\mp i\bar{x}}\int_{\xi=\bar{y}}^{(\bar{x})} e^{\pm i\xi}\frac{J_1\left(\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}\right)}{\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}}\mathrm{d}\xi \quad (22\text{b}).$$

VIII. Die Geschwindigkeitskomponenten und das Potential.

Die Werte der Gl. (22) für die Hakenintegrale können nun in die Gl. (19) für die Vertikalgeschwindigkeit v eingesetzt werden. Man erkennt sofort, daß nur im Bereich $\bar{x}-\bar{y}>0$ die Geschwindigkeit v von Null verschieden ist; dieser Bereich stellt, nach der Definition von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ (Gl. (17b)), ein unter dem Machschen Winkel ϑ von der Flügelvorderkante ausgehendes Keilfeld dar. In diesem Bereich $\bar{x}-\bar{y}>0$ ergibt sich:

[10]) Watson: A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge 1922, S. 359.

$$v(\bar{x},\bar{y};\tau)\,e^{-i\sigma\tau+i\bar{x}\frac{U_0}{c}} = C_1 e^{-i(\bar{x}-\bar{y})} - C_1\bar{y}\,e^{-i\bar{x}}\int\limits_{\xi=\bar{y}}^{\bar{x}} e^{i\xi}\frac{J_1(\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2})}{\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}}\,d\xi$$

$$+ C_2 e^{+i(\bar{x}-\bar{y})} - C_2\bar{y}\,e^{i\bar{x}}\int\limits_{\xi=\bar{y}}^{\bar{x}} e^{-i\xi}\frac{J_1(\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2})}{\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}}\,d\xi$$

$$+\frac{U_0^2-c^2}{\sigma c}\int\limits_{\bar{x}_1=0}^{\left\{\begin{smallmatrix}\bar{x}-\bar{y}\\ \bar{t}\end{smallmatrix}\right.}\left(\alpha+\beta\frac{U_0^2-c^2}{\sigma c}\bar{x}_1\right)e^{i\frac{U_0}{c}\bar{x}_1}\left[e^{-i(\bar{x}-\bar{x}_1-\bar{y})} - \bar{y}\,e^{-i(\bar{x}-\bar{x}_1)}\int\limits_{\xi=\bar{y}}^{\bar{x}-\bar{x}_1} e^{i\xi}\frac{J_1(\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2})}{\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}}\,d\xi\right.$$

$$\left.+ e^{i(\bar{x}-\bar{x}_1-\bar{y})} - \bar{y}\,e^{i(\bar{x}-\bar{x}_1)}\int\limits_{\xi=\bar{y}}^{\bar{x}-\bar{x}_1} e^{-i\xi}\frac{J_1(\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2})}{\sqrt{\xi^2-\bar{y}^2}}\,d\xi\right]d\bar{x}_1,$$

wobei in der oberen Grenze des Integrals über $\bar{x}_1$ der obere bzw. untere Ausdruck zu nehmen ist, je nachdem ob $\bar{x}-\bar{t}-\bar{y}\lessgtr 0$ ist, d. h. je nachdem der betrachtete Punkt $(\bar{x},\bar{y})$ im Be-

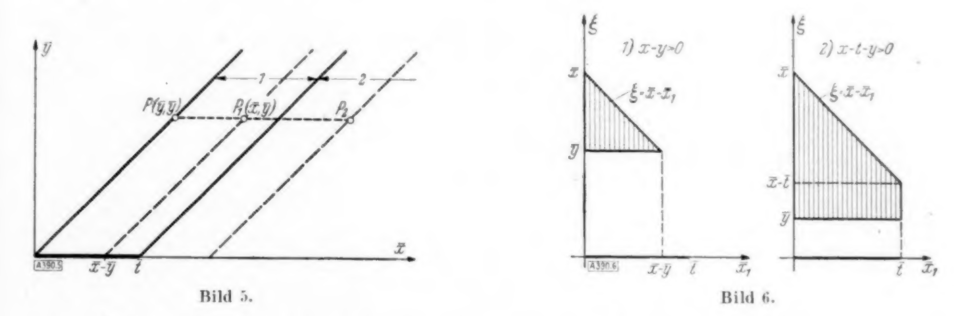


Bild 5.

Bild 6.

reich 1 oder 2 von Bild 5 liegt. Vertauscht man die Reihenfolge der Integrationen über ξ und $\bar{x}_1$, so ändern sich die Grenzen der Integrale in folgender Weise (s. Bild 6):

$$1.\quad \bar{x}-\bar{t}-\bar{y}<0:\qquad \int\limits_{\bar{x}_1=0}^{\bar{x}-\bar{y}}\int\limits_{\xi=\bar{y}}^{\bar{x}-\bar{x}_1} = \int\limits_{\xi=\bar{y}}^{\bar{x}}\int\limits_{\bar{x}_1=0}^{\bar{x}-\xi},$$

$$2.\quad \bar{x}-\bar{t}-\bar{y}>0:\qquad \int\limits_{\bar{x}_1=0}^{\bar{x}-\bar{y}}\int\limits_{\xi=\bar{y}}^{\bar{x}-\bar{x}_1} = \int\limits_{\xi=\bar{y}}^{\bar{x}-\bar{t}}\int\limits_{\bar{x}_1=0}^{\bar{t}} + \int\limits_{\xi=\bar{x}-\bar{t}}^{\bar{x}}\int\limits_{\bar{x}_1=0}^{\bar{x}-\xi}.$$

Da uns zur Berechnung der Flügelkräfte nur der Bereich am Flügel selbst interessiert, führen wir die Berechnung nur in diesem Bereich 1 durch. Wenn man die Integrationen nach $\bar{x}_1$ ausführt, die Konstanten α, β, C_1, C_2 nach Gl. (15) einsetzt, Gl. (16) berücksichtigt und auf das dimensionsbehaftete Koordinatensystem x, y zurückgeht, so ergibt sich nach einiger Zwischenrechnung:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}-\bar{t}-\bar{y}<0\\ &v(x,y;\tau) = e^{-i\frac{\mu_0}{\cos^2\vartheta}y\,\mathrm{cotg}\,\vartheta}\cdot\left(\frac{dg_1}{d\tau}\right)_{x-y\,\mathrm{cotg}\,\vartheta}\\ &\qquad -\frac{\mu_0}{\cos\vartheta}\,y\int\limits_{\xi=y\,\mathrm{cotg}\,\vartheta}^{x} e^{-i\frac{\mu_0}{\cos^2\vartheta}\xi}\,\frac{J_1\left(\frac{\mu_0\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\sqrt{\xi^2-y^2\,\mathrm{cotg}^2\,\vartheta}\right)}{\sqrt{\xi^2-y^2\,\mathrm{cotg}^2\,\vartheta}}\left(\frac{dg_1}{d\tau}\right)_{x-\xi}d\xi\end{aligned}\right\}\quad(23),$$

wo $\mu_0=\frac{\sigma}{U_0}$ und $\vartheta=\arcsin\frac{\sigma}{U_0}=$ Machscher Winkel ist (24).

Um die Geschwindigkeitskomponente u zu bestimmen, müssen wir v nach x differenzieren und nach y integrieren, siehe Gl. (5). Mit Hilfe der leicht zu verifizierenden Differentiationsrelation

$$\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial y}\int_{\xi=b y}^{x} e^{-i\frac{a}{\sin\vartheta}\xi} J_0(\sqrt{\xi^2-b^2 y^2}\cdot a)\,d\xi = -e^{-i\frac{a}{\sin\vartheta}b y} + a b y \int_{\xi=b y}^{x} e^{-i\frac{a}{\sin\vartheta}\xi}\frac{J_1(a\sqrt{\xi^2-b^2 y^2})}{\sqrt{\xi^2-b^2 y^2}}\,d\xi$$

ergibt sich dann:

$$\bar{x}-\bar{t}-\bar{y}<0 \qquad u=\int\frac{\partial v}{\partial x}\,d y$$

$$u(x,y;\tau)\,e^{-i\sigma\tau} = i\sigma E e^{-i\sigma\tau_0}\cdot\operatorname{tg}\vartheta\int_{\xi=y\operatorname{cotg}\vartheta}^{x} e^{-i\frac{\mu_0}{\cos^2\vartheta}\xi} J_0\left(\frac{\mu_0\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\sqrt{\xi^2-y^2\operatorname{cotg}^2\vartheta}\right)d\xi$$

$$-i\sigma\left[Y-\left(\frac{U_0}{i\sigma}-x_a\right)E e^{-i\sigma\tau_0}\right]\operatorname{tg}\vartheta\, e^{-i\frac{\mu_0}{\cos^2\vartheta}x} J_0\left(\frac{\mu_0\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\sqrt{x^2-y^2\operatorname{cotg}^2\vartheta}\right)\ [11].$$

Für die Potentialfunktion φ, die durch die Gleichungen $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=u;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=v$ definiert ist, erhält man:

im Bereich 1 (Bild 5)

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,y;\tau)\,e^{-i\sigma\tau} &= i\sigma E e^{-i\sigma\tau_0}\operatorname{tg}\vartheta\int_{\xi=y\operatorname{cotg}\vartheta}^{x} e^{-i\frac{\mu_0}{\cos^2\vartheta}\xi} J_0\left(\frac{\mu_0\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\sqrt{\xi^2-y^2\operatorname{cotg}^2\vartheta}\right)(x-\xi)\,d\xi\\ &-i\sigma\left[Y-\left(\frac{U_0}{i\sigma}-x_a\right)E e^{-i\sigma\tau_0}\right]\operatorname{tg}\vartheta\int_{\xi=y\operatorname{cotg}\vartheta}^{x} e^{-i\frac{\mu_0}{\cos^2\vartheta}\xi} J_0\left(\frac{\mu_0\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\sqrt{\xi^2-y^2\operatorname{cotg}^2\vartheta}\right)d\xi\end{aligned}\right\}\quad . . (26).$$

Damit sind die Geschwindigkeitskomponenten und das Potential im Bereich der oberen Halbebene ($y>0$) bekannt, jedoch noch nicht in der unteren, da die Hakenintegrale nur für positives y definiert sind. Man erhält jedoch die Werte in der unteren Halbebene leicht durch folgende Überlegung: Wenn längs der x-Achse zur Zeit τ bestimmte Vertikalgeschwindigkeiten herrschen, so haben sich diese nach einer halben Schwingungsperiode, d. h. zur Zeit $\tau+\pi/\sigma$ auf den entgegengesetzt gleichen Wert geändert. Denkt man sich die ganze obere Halbebene im Zustand $\tau+\pi/\sigma$ an der x-Achse gespiegelt, so stimmen längs der x-Achse die Vertikalgeschwindigkeiten mit denen der oberen Halbebene im Zustand τ nach Größe und Richtung überein. Daraus folgt, daß der Strömungszustand der oberen Halbebene zur Zeit $\tau+\pi/\sigma$, durch Spiegelung auf die untere Halbebene übertragen, die Strömung in der unteren Halbebene zur Zeit τ gibt (siehe auch Bild 7). Wenn an der Oberseite des Flügels also Störgeschwindigkeit und Potential den Wert haben [12]):

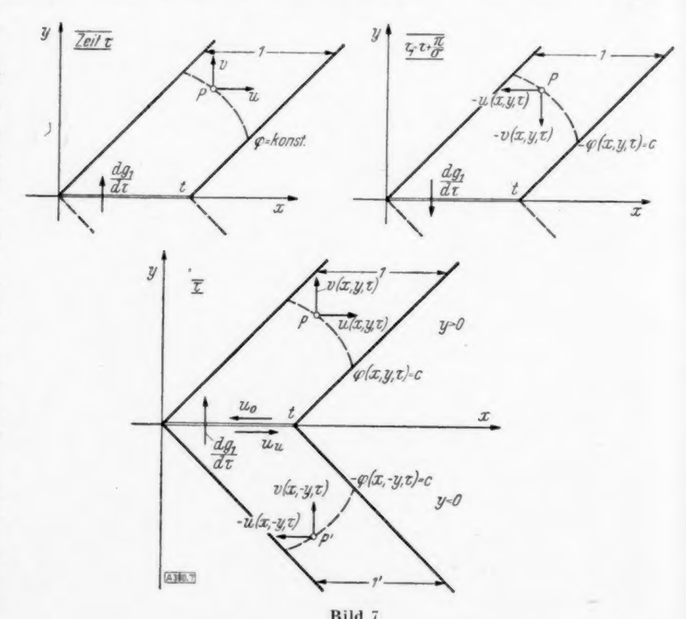


Bild 7.

[11]) An sich kann bei der Integration noch eine additive, willkürliche Funktion von x auftreten. In unserem Falle muß sie jedoch verschwinden; dies ergibt sich z. B. aus der Bedingung, daß beim Durchtritt der Strömung durch die Front der Machschen Welle, d. h. auf der Geraden $x=y\operatorname{cotg}\vartheta$, die Geschwindigkeitskomponente in Richtung dieser Geraden ungeändert bleiben muß.

[12]) Da die Schwingungsamplituden des Flügels klein sind, stimmt die Geschwindigkeit am Flügel in erster Näherung mit der an der x-Achse überein.

$$\left.\begin{aligned} u_o &= + \underset{y \to +0}{u\,(x, y; \tau)} \\ v_o &= + \underset{y \to +0}{v\,(x, y; \tau)} \\ \varphi_o &= + \underset{y \to +0}{\varphi\,(x, y; \tau)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27\,\mathrm{a}),$$

so haben sie an der Unterseite den Wert:

$$\left.\begin{aligned} u_u &= - \underset{y \to -0}{u\,(x, -y; \tau)} \\ v_u &= + \underset{y \to -0}{v\,(x, -y; \tau)} \\ \varphi_u &= - \underset{y \to -0}{\varphi\,(x, -y; \tau)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27\,\mathrm{b}).$$

IX. Kräfte und Momente am Flügel.

Um die Flügelkräfte zu berechnen, muß man den Druck p am Flügel kennen. Wenn man in der Bernouillischen Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(U^2 + V^2) + \int \frac{\mathrm{d}\,p}{\varrho} = C\,(\tau),$$

die durch Integration der Gl. (4) erhalten wird, die Zustandsgleichung $p = a \cdot \varrho^{\varkappa}$ einsetzt, so erhält man für p:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(U^2 + V^2) + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\varrho} = C\,(\tau)$$

oder, unter Beibehaltung nur der Glieder erster Ordnung:

$$\frac{p}{\varrho_0} = -\frac{1}{\varkappa - 1}\frac{p_0}{\varrho_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - U_0 \cdot u + C\,(\tau) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28).$$

Für die Auftriebskraft am Flügel ergibt sich dann:

$$P = \int_{x=0}^{t} (p_u - p_o)\,\mathrm{d}\,x = 2\,\varrho_0 \left[\int_{x=0}^{t} \frac{\partial \varphi\,(x, 0; \tau)}{\partial \tau}\,\mathrm{d}\,x + U_0 \int_{x=0}^{t} u\,(x, 0; \tau)\,\mathrm{d}\,x\right] \quad \ldots \ldots \quad (29),$$

für das Moment der Luftkräfte um die Vorderkante (im mathematisch positiven Sinn gerechnet):

$$M = \int_{x=0}^{t} (p_u - p_o)\,x\,\mathrm{d}\,x = 2\,\varrho_0 \left[\int_{x=0}^{t} \frac{\partial \varphi\,(x, 0; \tau)}{\partial \tau}\,x\,\mathrm{d}\,x + U_0 \int_{x=0}^{t} u\,(x, 0; \tau)\,x\,\mathrm{d}\,x\right] \quad \ldots \quad (30).$$

Setzt man hier $u\,(x, 0; \tau)$ und $\dfrac{\partial \varphi\,(x, 0; \tau)}{\partial \tau}$ nach Gl. (25) und (26) ein und führt in die Formeln die momentane Auslenkung des Flügels $y = Y e^{i\sigma\tau}$ und den momentanen Anstellwinkel $\varepsilon = E\,e^{i\sigma(\tau - \tau_0)}$ ein (siehe Gl. (9)[13]), so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{P}{2\,\varrho_0\,t\,\mathrm{tg}\,\vartheta} = {} & U_0^2\,\varepsilon \int_0^1 e^{-i\omega\xi} J_0\,(\omega \sin\vartheta\,\xi)\,\mathrm{d}\,\xi \\ & - U_0\left(\frac{\mathrm{d}\,y_a}{\mathrm{d}\,\tau} + x_a \frac{\mathrm{d}\,\varepsilon}{\mathrm{d}\,\tau}\right) \int_0^1 e^{-i\omega\xi} J_0\,(\omega \sin\vartheta\,\xi)\,\mathrm{d}\,\xi \\ & + 2\,U_0\,t\,\frac{\mathrm{d}\,\varepsilon}{\mathrm{d}\,\tau} \int_{u=0}^{1} \int_{\xi=0}^{u} e^{-i\omega\xi} J_0\,(\omega \sin\vartheta\,\xi)\,\mathrm{d}\,\xi\,\mathrm{d}\,u \\ & - t\left(\frac{\mathrm{d}^2\,y_a}{\mathrm{d}\,\tau^2} - x_a \frac{\mathrm{d}^2\,\varepsilon}{\mathrm{d}\,\tau^2}\right) \int_{u=0}^{1} \int_{\xi=0}^{u} e^{-i\omega\xi} J_0\,(\omega \sin\vartheta\,\xi)\,\mathrm{d}\,\xi\,\mathrm{d}\,u \\ & + t^2 \frac{\mathrm{d}^2\,\varepsilon}{\mathrm{d}\,\tau^2}\left(\int_{u=0}^{1} u \int_{\xi=0}^{u} e^{-i\omega\xi} J_0\,(\omega \sin\vartheta\,\xi)\,\mathrm{d}\,\xi\,\mathrm{d}\,u - \int_{u=0}^{1} \int_{\xi=0}^{u} e^{-i\omega\xi} J_0\,(\omega \sin\vartheta\,\xi)\,\xi\,\mathrm{d}\,\xi\,\mathrm{d}\,u\right) \end{aligned}$$

[13]) Die Glieder E_0, Y_0 der Gl. (9) verschwinden hier, wenn man zur Anströmrichtung symmetrische Schwingungen betrachtet.

oder schließlich nach einigen Umformungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{P}{2\varrho_0 t \operatorname{tg}\vartheta} = U_0^2\left[\varepsilon - \frac{1}{U_0}\left(\frac{\mathrm{d}y_a}{\mathrm{d}\tau} + x_a\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\right)\right]\cdot r_1 + 2\,U_0\,t\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\cdot r_2\\ - t\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}(y_a + x_a\varepsilon)\cdot r_2 + \frac{1}{2}t^2\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}\tau^2}\cdot r_3\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (31\,\mathrm{a}).$$

Ganz entsprechend wird

$$\left.\begin{aligned}\frac{M}{2\varrho_0 t^2 \operatorname{tg}\vartheta} = U_0^2\left[\varepsilon - \frac{1}{U_0}\left(\frac{\mathrm{d}y_a}{\mathrm{d}\tau} + x_a\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\right)\right]\cdot q_1 + U_0\,t\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\cdot q_2\\ - \frac{1}{2}t\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}(y_a + x_a\varepsilon)\cdot q_2 + \frac{1}{6}t^2\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}\tau^2}\cdot q_3\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (31\,\mathrm{b}).$$

Hierin sind die Größen r_λ, q_λ Beiwerte, die von einer reduzierten Frequenz $\omega = \frac{\sigma t}{U_0 \cos^2\vartheta}$ und dem Machschen Winkel ϑ abhängen:

$$f_\lambda(\sin\vartheta, \omega) = \int_0^1 e^{-i\omega u} J_0(\omega\sin\vartheta\cdot u)\,u^\lambda\cdot\mathrm{d}u, \qquad \lambda = 0, 1, 2, 3$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= f_0(\sin\vartheta,\omega) & q_1 &= f_1(\sin\vartheta,\omega)\\ r_2 &= f_0(\sin\vartheta,\omega) - f_1(\sin\vartheta,\omega) & q_2 &= f_0(\sin\vartheta,\omega) - f_2(\sin\vartheta,\omega)\\ r_3 &= f_0(\sin\vartheta,\omega) - 2f_1(\sin\vartheta,\omega) & q_3 &= 2f_0(\sin\vartheta,\omega) - 3f_1(\sin\vartheta,\omega)\\ &\quad + f_2(\sin\vartheta,\omega) & &\quad + f_3(\sin\vartheta,\omega)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (32).$$

Um eine Vorstellung von den Unterschieden zwischen der inkompressiblen Strömung und der Überschallströmung zu geben, sind in Tafel 1 die Luftkräfte beider Strömungen gegenübergestellt. In der gewählten Darstellung haben bei inkompressibler Strömung die Kräfte feste Angriffspunkte, während sie bei Überschallströmung im Lauf einer Schwingung ihre Lage ändern (die Hebelarme sind komplex); ferner ist im ersten Fall die Bewegung verschiedener Flügelpunkte (vorderer und hinterer Neutralpunkt, Mittelpunkt) für die Kräfte maßgebend, während sich im zweiten Fall alles auf die Bewegung der Vorderkante beziehen läßt.

X. Berechnung der Beiwerte r, q.

Für die Integrale f_λ der Gl. (32), die zur Ermittlung der Werte r, q numerisch berechnet werden müssen, läßt sich eine Rekursionsformel aufstellen, die f_1, f_2, f_3 auf f_0 zurückführt. Führen wir den Ausdruck ein

$$F_\lambda(\sin\vartheta,\omega) = \omega^{\lambda+1}\cdot f_\lambda(\sin\vartheta,\omega) = \int_0^\omega e^{-iu}\,u^\lambda J_0(u\cdot\sin\vartheta)\,\mathrm{d}u \quad \ldots\ldots (33),$$

so erhält man durch partielle Integration leicht:

$$F_\lambda(\sin\vartheta,\omega) = i\,e^{-iu}u^\lambda J_0(u\sin\vartheta)\Big|_{u=0}^{\omega} - i\lambda F_{\lambda-1}(\sin\vartheta,\omega) + i\sin\vartheta\int_0^\omega e^{-iu}u^\lambda J_1(u\sin\vartheta)\,\mathrm{d}u$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^\omega e^{-iu}u^\lambda J_1(u\sin\vartheta)\,\mathrm{d}u = i\,e^{-iu}u^\lambda J_1(u\sin\vartheta)\Big|_{u=0}^{\omega} - i\sin\vartheta\,F_\lambda(\sin\vartheta,\omega)\\ + i(1-\lambda)\int_0^\omega e^{-iu}u^{\lambda-1}J_1(u\sin\vartheta)\,\mathrm{d}u\,.\end{aligned}$$

Führen wir die letzte Gleichung in die vorletzte ein und benutzen die vorletzte nach Vertauschung von λ mit $\lambda - 1$, so erhalten wir die Rekursionsformel:

$$\left.\begin{aligned}(1-\sin^2\vartheta)F_\lambda(\sin\vartheta,\omega)e^{i\omega} = i\,\omega^\lambda J_0(\omega\sin\vartheta) - \sin\vartheta\cdot\omega^\lambda J_1(\omega\sin\vartheta)\\ + (1-\lambda)\,\omega^{\lambda-1}J_0(\omega\sin\vartheta) + (1-2\lambda)F_{\lambda-1}(\sin\vartheta,\omega)e^{i\omega}\\ + (1-\lambda)^2F_{\lambda-2}(\sin\vartheta,\omega)e^{i\omega}, \qquad \lambda \geq 1\end{aligned}\right\} \quad . \ (34).$$

Für $\lambda = 1$ ergibt sich speziell

$$(1-\sin^2\vartheta)F_1(\sin\vartheta,\omega)e^{i\omega} = i\,\omega J_0(\omega\sin\vartheta) - \omega\sin\vartheta\,J_1(\omega\sin\vartheta) - i\,F_0(\sin\vartheta,\omega)\,e^{i\omega} \quad . \ (34\,\mathrm{a}).$$

Damit lassen sich aus dem Integral F_0 bzw. f_0 alle F_λ bzw. f_λ berechnen.

Tafel 1. Gegenüberstellung der Luftkräfte bei inkompressibler Strömung und Überschallströmung.

Inkompressible Strömung (nach Kassner-Fingado, l. c.)		Überschallströmung	
1. Eine dem wirksamen Anstellwinkel des hinteren Neutralpunktes proportionale Auftriebskraft $$K_1 = \pi \varrho_0 \, t \, U_0^2 \left(\varepsilon - \frac{1}{U_0} \frac{d y_h}{d \tau}\right) \cdot P$$ Angriffspunkt der Kraft im vorderen Neutralpunkt: $$h_1 = 0{,}25 \, t \, .$$	$P =$ Auftriebsvektor (siehe l. c.)	1. Eine dem wirksamen Anstellwinkel der Vorderkante proportionale Auftriebskraft $$K_1 = \pi \varrho_0 \, t \, U_0^2 \left(\varepsilon - \frac{1}{U_0} \frac{d y_v}{d \tau}\right) \cdot P_1$$ Angriffspunkt der Kraft: $$h_1 = \frac{q_1}{r_1} \, t \, .$$	$P_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot r_1$
2. Eine der Drehgeschwindigkeit des Flügels proportionale Auftriebskraft $$K_2 = \frac{\pi}{4} \varrho_0 t^2 U_0 \frac{d \varepsilon}{d \tau}$$ Angriffspunkt der Kraft im hinteren Neutralpunkt: $$h_2 = 0{,}75 \, t \, .$$		2. Eine der Drehgeschwindigkeit des Flügels proportionale Auftriebskraft $$K_2 = \frac{\pi}{4} \varrho_0 t^2 U_0 \frac{d \varepsilon}{d \tau} \cdot P_2$$ Angriffspunkt der Kraft: $$h_2 = \frac{1}{2} \frac{q_2}{r_2} \, t \, .$$	$P_2 = \frac{16}{\pi} \operatorname{tg} \vartheta \cdot r_2$
3. Eine der Beschleunigung des Flügelmittelpunktes proportionale Auftriebskraft $$K_3 = -\frac{\pi}{4} \varrho_0 t^2 \frac{d^2 y_m}{d \tau^2}$$ Angriffspunkt der Kraft im Flügelmittelpunkt: $$h_3 = 0{,}5 \, t \, .$$		3. Eine der Beschleunigung der Vorderkante proportionale Auftriebskraft $$K_3 = -\frac{\pi}{4} \varrho_0 t^2 \frac{d^2 y_v}{d \tau^2} \cdot P_3$$ Angriffspunkt der Kraft: $$h_3 = \frac{1}{2} \frac{q_2}{r_2} \, t \, .$$	$P_3 = \frac{8}{\pi} \operatorname{tg} \vartheta \cdot r_2$
4. Ein der Drehbeschleunigung des Flügels proportionales Moment $$M_4 = -\frac{\pi}{128} \varrho_0 t^4 \frac{d^2 \varepsilon}{d \tau^2} \, .$$		4. Eine der Drehbeschleunigung des Flügels proportionale Auftriebskraft $$K_4 = \varrho_0 t^3 \frac{d^2 \varepsilon}{d \tau^2} \cdot P_4$$ Angriffspunkt der Kraft: $$h_4 = \frac{1}{3} \frac{q_3}{r_3} \, t \, .$$	$P_4 = \operatorname{tg} \vartheta \cdot r_3$

Die Berechnung von f_0 wird mit Hilfe von Reihenentwicklung vorgenommen. Führen wir in

$$f_0 (\sin \vartheta, \omega) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} e^{-i u} J_0 (u \sin \vartheta) \, d u$$

die Produktenentwicklung der Besselfunktionen

$$J_0 (u \sin \vartheta) = \sum_{\lambda = 0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} (\sin^2 \vartheta - 1)^{\lambda} (\frac{1}{2} u)^{\lambda}}{\lambda!} J_{\lambda} (u) \quad ^{14})$$

ein, so erhalten wir

$$f_0 (\sin \vartheta, \omega) = \frac{e^{-i \omega}}{\omega} \sum_{\lambda = 0}^{\infty} \frac{(1 - \sin^2 \vartheta)^{\lambda}}{\lambda! \; 2^{\lambda}} \int_0^{\omega} e^{i (\omega - u)} J_{\lambda} (u) \, u^{\lambda} \, d u \, .$$

[14]) Siehe z. B. Watson, l. c. S. 142, Gl. (16).

Das in dieser Reihe auftretende Integral läßt sich ausrechnen. Durch partielle Integration erhält man

$$\int_0^\omega e^{i(\omega-u)} J_\lambda(u)\, u^\lambda \, \mathrm{d}u = e^{i(\omega-u)} J_\lambda(u) \frac{u^{\lambda+1}}{\lambda+1}\Big|_0^\omega$$

$$-\int_0^\omega \frac{u^{\lambda+1}}{\lambda+1}\left\{-i\, e^{i(\omega-u)} J_\lambda(u) + e^{i(\omega-u)}\left[\frac{\lambda}{u} J_\lambda(u) - J_{\lambda+1}(u)\right]\right\} \mathrm{d}u$$

$$= \frac{\omega^{\lambda+1}}{\lambda+1} J_\lambda(\omega) + \frac{i}{\lambda+1}\int_0^\omega u^{\lambda+1} e^{i(\omega-u)} J_\lambda(u)\, \mathrm{d}u$$

$$-\frac{\lambda}{\lambda+1}\int_0^\omega e^{i(\omega-u)} J_\lambda(u)\, u^\lambda\, \mathrm{d}u + \frac{1}{\lambda+1}\int_0^\omega e^{i(\omega-u)} J_{\lambda+1}(u)\, u^{\lambda+1}\, \mathrm{d}u$$

oder

$$(2\lambda+1)\int_0^\omega e^{i(\omega-u)} J_\lambda(u) u^\lambda \mathrm{d}u = \omega^{\lambda+1} J_\lambda(\omega) + i\int_0^\omega u^{\lambda+1} e^{i(\omega-u)} J_\lambda(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^\omega u^{\lambda+1} e^{i(\omega-u)} J_{\lambda+1}(u)\,\mathrm{d}u .$$

Integriert man das zweite Glied der rechten Seite noch einmal partiell:

$$\int_0^\omega e^{i(\omega-u)} u^{\lambda+1} J_\lambda(u)\,\mathrm{d}u = u^{\lambda+1} J_{\lambda+1}(u)\, e^{i(\omega-u)}\Big|_0^\omega + i\int_0^\omega u^{\lambda+1} J_{\lambda+1}(u)\, e^{i(\omega-u)}\,\mathrm{d}u ,$$

so erhält man schließlich

$$(2\lambda+1)\int_0^\omega e^{i(\omega-u)} J_\lambda(u)\, u^\lambda\, \mathrm{d}u = \omega^{\lambda+1}\left[J_\lambda(\omega) + i\, J_{\lambda+1}(\omega)\right].$$

Damit ergibt sich

$$f_0(\sin\vartheta, \omega) = e^{-i\omega}\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(1-\sin^2\vartheta)^\lambda\, \omega^\lambda}{\lambda!\, 2^\lambda (2\lambda+1)}\left[J_\lambda(\omega) + i\, J_{\lambda+1}(\omega)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (35).$$

Diese Formel läßt sich zur numerischen Berechnung verwenden.

XI. Anhang: Die stationäre Strömung.

Der Vollständigkeit halber soll noch gezeigt werden, daß sich auch die stationäre Strömung um ein Flügelprofil, die an sich schon bekannt ist[15]), mit Hilfe von Hakenintegralen behandeln läßt.

Wir bauen das Strömungsfeld wieder aus Elementarströmungen auf. Diese ergeben sich aus Gl. (11), indem wir dort $\sigma \to 0$ gehen lassen, d. h. die Strömung stätionär werden lassen:

$$v_e(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{\frown}{0}} \frac{e^{i\mu(x - x_1 - y\,\mathrm{cotg}\,\vartheta)}}{\mu}\,\mathrm{d}\mu .$$

Wie sich leicht zeigen läßt[8]), hat v_e je nach der Lage des Punktes x, y die Werte

$$v_e(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x\text{-}x_1 - y\,\mathrm{cotg}\,\vartheta < 0 \\ 1 & \text{für } x\text{-}x_1 - y\,\mathrm{cotg}\,\vartheta > 0 \end{cases},$$

d. h. v_e hat in der x-y-Ebene nur in einem vom Punkt x_1 ausgehenden Keil (mit dem halben Öffnungswinkel ϑ) einen von Null verschiedenen, überall konstanten Wert. Das von der Elementarlösung dargestellte Strömungsfeld entspricht also der Prandtlschen Strömung um eine Ecke (bei sehr kleinem Neigungswinkel der Ecke).

[15]) Siehe z. B. Ackeret: Luftkräfte auf Flügel, die mit größerer als Schallgeschwindigkeit bewegt werden. Z. Flugtechn. Motorl. Bd. 16 (1925), S. 72. Prandtl: Allgemeine Überlegungen über die Strömung zusammendrückbarer Flüssigkeiten. Volta-Tagung, Rom 1936.

Wir überlagern nun derartige Elementarlösungen, so daß sie die Randbedingungen der Strömung um einen Flügel erfüllen. Diese lauten (s. Abschn. V und Gl. (10b)):

längs der x-Achse 1) für $x < 0$ $\quad v = 0$

2) für $0 < x < t$ $\quad v = U_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}[-(x\text{-}x_a)\,E_0 + \delta_{o,\,u}(x)]$

3) für $t < x$ $\quad v = 0$.

Folgender Ansatz führt zum Ziel:

$$v\,(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x_1=0}^{x} f(x_1)\left[\int\limits_{\substack{-\cup\to\\0}} \frac{e^{i\mu(x - x_1 - y\,\mathrm{cotg}\,\vartheta)}}{\mu}\,\mathrm{d}\,\mu - \int\limits_{\substack{-\cup\to\\0}} \frac{e^{i\mu(x - t - y\,\mathrm{cotg}\,\vartheta)}}{\mu}\,\mathrm{d}\,\mu\right]\mathrm{d}\,x_1$$

$$+ C\,\frac{U_0}{2\pi i}\left[\int\limits_{\substack{-\cup\to\\0}} \frac{e^{i\mu(x - y\,\mathrm{cotg}\,\vartheta)}}{\mu}\,\mathrm{d}\,\mu - \int\limits_{\substack{-\cup\to\\0}} \frac{e^{i\mu(x - t - y\,\mathrm{cotg}\,\vartheta)}}{\mu}\,\mathrm{d}\,\mu\right].$$

Wie man leicht sieht, sind die Randbedingungen 1) und 3) ohne weiteres erfüllt; damit auch Bedingung 2) erfüllt ist, müssen die noch freien Größen $f(x_1)$ und C folgender Gleichung genügen:

$$\int\limits_{x_1=0}^{x} f(x_1)\,\mathrm{d}\,x_1 + U_0\,C = U_0\left[-E_0 + \frac{\mathrm{d}\,\delta_{o,\,u}(x)}{\mathrm{d}\,x}\right]$$

oder

$$f(x) = U_0 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2}\,\delta_{o,\,u}(x); \qquad C = -E_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\,\delta_{o,\,u}(x)}{\mathrm{d}\,x}\right)_{x=0}.$$

Der Index o, u bei δ soll andeuten, daß im oberen Teil der Halbebene δ_o, im unteren Teil δ_u in Frage kommt. Es ergibt sich dann:

im Bereich $0 < x - |y|\,\mathrm{cotg}\,\vartheta < t$

$$v\,(x, y) = U_0\left[-E_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\,\delta_{o,\,u}(z)}{\mathrm{d}\,z}\right)_{z = x - |y|\,\mathrm{cotg}\,\vartheta}\right].$$

Für die andere Geschwindigkeitskomponente u erhält man nach Gl. (5):

$$u\,(x, y) = \mp\, U_0\,\mathrm{tg}\,\vartheta\left[-E_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\,\delta_{o,\,u}(z)}{\mathrm{d}\,z}\right)_{z = x - |y|\,\mathrm{cotg}\,\vartheta}\right],$$

wobei das negative Zeichen für die obere, das positive für die untere Halbebene gilt.

Die Berechnung der Flügelkräfte geht dann in bekannter Weise vor sich. Es sei nur kurz das Ergebnis angegeben, das sich genau mit den Formeln von Ackeret deckt:

Auftrieb $\quad P = \varrho_0 \cdot U_0^2 \cdot t \cdot 2\,\mathrm{tg}\,\vartheta \cdot E_0$

Moment um die Vorderkante (im math. posit. Sinn)

$$M = 2\,\varrho_0\,U_0^2 \cdot \mathrm{tg}\,\vartheta \cdot \left[E_0 \cdot \frac{t^2}{2} - \int\limits_{x=0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{\delta_o + \delta_u}{2}\right) x\,\mathrm{d}\,x\right]$$

$$= 2\,\varrho_0\,U_0^2 \quad \mathrm{tg}\,\vartheta \cdot \left[E_0 \cdot \frac{t^2}{2} + \int\limits_{x=0}^{t} \frac{\delta_o + \delta_u}{2}\,\mathrm{d}\,x\right]$$

Widerstand $\quad W = E_0 \cdot P$. 390

Abgeschlossen im Oktober 1939.

Über eine gesteuerte eindimensionale Bewegung.

Von *Herbert Bilharz* in Braunschweig.

Bericht aus dem Institut für Aerodynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig*).

Die periodischen Lösungen der nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichung (1) werden explizit angegeben und anschließend die Stabilitätsverhältnisse der geradlinigen Bewegung eines Massenpunktes bei unstetiger verallgemeinerter Kraft (3) untersucht. Solche Bewegungen treten auf bei Benutzung bestimmter fehlerfreier Automatiken zur Stabilisierung dynamischer Systeme eines Freiheitsgrades. Wie Verfasser an anderer Stelle für $\mu = 0$ in (1) gezeigt hat, können fehlerbehaftete Automatiken die Ergebnisse u. U. verbessern.

I. Einleitung.

Es sei $x(t \mid \varrho)$ eine reelle, zweimal abteilungsweise stetig differenzierbare Funktion der unabhängigen Variablen $t \geq 0$ und des reellen Parameters ϱ mit $-\infty < \varrho < \infty$, $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}$, $\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2\,x}{\mathrm{d}\,t^2}$; $\gamma > 0$, $\varkappa > 0$ und $\mu > 0$ seien Konstante. Unter diesen Voraussetzungen werden im folgenden die Integrale der nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + 2\,\varkappa\,\dot{x} + \mu\,x + \gamma\,\mathrm{sgn}\,(x + \varrho\,\dot{x}) = 0 \qquad (1)$$

untersucht; die Funktion $\mathrm{sgn}\,(x + \varrho\,\dot{x})$ ist definiert durch

$$\mathrm{sgn}\,(x + \varrho\,\dot{x}) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \text{für } x + \varrho\,\dot{x} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \qquad (2),$$

(sgn 0 wird also nicht erklärt). Für $\mu = 0$ habe ich anläßlich einer Stabilisierungsaufgabe der Flugmechanik [1]) versucht, allgemeine Aussagen über die Lösungen von (1) zu erhalten.

Deuten wir t als Zeitvariable, dann ist (1) die Differentialgleichung für die geradlinige Bewegung des Massenpunktes Eins in einem verallgemeinerten Kraftfeld mit der unstetigen, von der Ortskoordinate x, von der Geschwindigkeit $\dot{x}$ und dem Parameter ϱ abhängigen Kraft

$$f(x, \dot{x} \mid \varrho) = -2\,\varkappa\,\dot{x} - \mu\,x - \gamma\,\mathrm{sgn}\,(x + \varrho\,\dot{x}) \qquad (3).$$

Wird darin $y = \dot{x}$ als neue Variable eingeführt (und $\dot{y}$ für $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}$ geschrieben), so ist (1) äquivalent dem System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{x} - y = 0, \quad \dot{y} - f = 0 \qquad (4).$$

Nach den geometrischen Methoden Poincarés [2]) lassen sich alle möglichen Bewegungen solcher dynamischen Systeme mit einem Freiheitsgrad qualitativ untersuchen; den periodischen Lösungen (mit Einschluß der Gleichgewichtslagen) kommt darnach wesentliche Bedeutung für Stabilitätsaussagen zu. Da Gleichgewichtslagen für (1) nicht definiert sind, suchen wir periodische Bewegungen aufzufinden und werden sie im nächsten Abschnitt explizit angeben. Damit wird insbesondere die Existenz von Lösungen der Gl. (1) für alle $t \geq 0$ bewiesen sein. Für nichtlineare Differentialgleichungen ist diese explizite Angabe der periodischen Lösungen im allgemeinen nicht in geschlossener Form möglich [3]). Hier, wie bei einer großen Anzahl ähnlicher Aufgaben, ist sie besonders einfach; im wesentlichen ist nur ein lineares Gleichungssystem aufzulösen.

*) Im Auszug vorgetragen auf der GAMM-Tagung 1942 in München.

[1]) Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 317 bis 326; im folgenden zitiert mit [L]. Dort sind auch einige technische Hinweise gegeben. Vgl. ferner K. Bögel: Das Verhalten gedämpfter und aufschaukelnder freier Schwinger unter der gleichzeitigen Einwirkung einer konstanten Reibungskraft. Ing.-Arch. Bd. 12 (1941), S. 247 bis 254. Darin wird in (1) unsere Signumfunktion durch die speziellere Funktion sgn $\dot{x}$ ersetzt. Die Ergebnisse von Bögel lassen sich aus unseren Resultaten ableiten, wenn wir $|\varrho| = \infty$ setzen; die dortige kritische Schwingungsweite entspricht unserer periodischen Lösung.

[2]) H. Poincaré: Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. Journal de Mathématiques, ser. 3, vol. 7 (1881), vol. 8 (1882), ser. 4, vol. 1 (1885), vol. 2 (1886); insbesondere die beiden erstgenannten Teile.

[3]) Vgl. z. B. G. Hamel: Erzwungene Schwingungen endlicher Amplituden. Math. Ann. Bd. 86 (1922), S. 1 bis 13.

Mit Benutzung einer Stabilitätsdefinition von Trefftz wird im letzten Abschnitt gezeigt, daß die periodischen Lösungen von (1) (für jedes ϱ mit $-\infty < \varrho < 0$ gibt es genau eine und für $\varrho \geq 0$ keine) stabil sind und alle anderen stabilen Bewegungen für $t \to \infty$ gegen diese periodische Bewegung konvergieren. Instabile Lösungen treten dadurch auf, daß von einer endlichen Zeit t_* an (1) nicht eindeutig fortsetzbar wird[4]. Nach Befragen des Experiments und Berücksichtigung seiner Fehler ((2) ist praktisch nur näherungsweise zu verwirklichen) läßt sich eventuell eine eindeutige Fortsetzung für $t > t_*$ angeben. Derartige Versuche für $\mu > 0$ sind mir bis jetzt nicht bekannt geworden; ich muß mich darauf beschränken, auf diese Instabilität hinzuweisen.

Für die Integrale der Systeme

$$\dot{x} - y = 0, \quad \dot{y} - f_+ = 0 \quad (5)$$

bzw.

$$\dot{x} - y = 0, \quad \dot{y} - f_- = 0 \quad (6)$$

mit

$$f_\pm = -2\varkappa y - \mu x \mp \Gamma \quad (7)$$

und reellem Γ gelten die bekannten Existenz- und Eindeutigkeitssätze[5]), von denen später, insbesondere beim Stabilitätsnachweis, öfters Gebrauch gemacht wird, ohne daß diese Tatsache jedesmal ausführlich Erwähnung findet.

Aus der Schwingungslehre kommen die hinreichend bekannten Tatsachen zur Anwendung: Die Integrale $x(t)$, $y(t)$ dieser Systeme geben in der (x, y)-Ebene (Phasenraum) orientierte doppelpunktfreie, diese Ebene einfach und lückenlos überdeckende Kurven, welche sich für $\varkappa^2 < \mu$ abzählbar unendlich oft um die Punkte $\frac{-\Gamma}{\mu}$ bzw. $\frac{\Gamma}{\mu}$ (Strudelpunkte) herumwinden und für $t \to \infty$ in diese konvergieren. Die Richtung der Phasenkurven ist $\frac{dy}{dx} = \frac{f_\pm}{y}$, die x-Achse wird also stets vertikal überschritten. Sei $P(t)$ ein laufender Punkt längs einer solchen Spirale, so ist der Abstand zwischen P und dem Strudelpunkt eine monoton gegen Null konvergierende Funktion von t für $t \to \infty$. Für $\varkappa^2 \geq \mu$ münden die Phasenkurven für $t \to \infty$ ebenfalls in die (Knoten-) Punkte $\frac{\pm\Gamma}{\mu}$ ein, überqueren die x-Achse aber höchstens einmal.

Nachstehende Definition ist nicht unentbehrlich, aber oft zweckmäßig: Die Gesamtheit aller Integrale $x(t \mid \varrho)$ von (1) für festes ϱ heißt ein gesteuertes System Σ_ϱ, das einzelne Integral die Lösung in einem gesteuerten System.

II. Periodische Lösungen.

Nach (2) ist $\gamma \cdot \operatorname{sgn}(x + \varrho \dot{x})$ eine abteilungsweise konstante Funktion von t (und natürlich auch von ϱ, worauf wir später zurückkommen werden); die Länge der einzelnen Abteilungen wird durch $x(t \mid \varrho)$ bestimmt. Periodische Lösungen von (1) werden sich dort einstellen, wo diese Abteilungslängen konstant sind.

Wir bestimmen nunmehr eine Klasse periodischer Lösungen und wählen hernach diejenigen von (1) aus. Es sei $a > 0$, s durchlaufe die Menge der ganzen Zahlen $\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$; ferner sei $\Gamma(t)$ eine reelle, abteilungsweise konstante und mod. $2a$ periodische Funktion von t mit $|\Gamma| = \gamma > 0$. Speziell werden gesetzt[6])

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \Gamma \\ -\Gamma \end{cases} \text{für} \quad \begin{aligned} 2sa &\leq t \leq (2s+1)a, \\ (2s+1)a &\leq t \leq (2s+2)a \end{aligned} \quad (8).$$

Die Zeitmarke $t = 0$ ist danach ohne Beschränkung der Allgemeinheit eindeutig in einer Sprungstelle von $-\Gamma$ nach Γ (kurz: Aufschaltstelle von Γ) festgelegt. Diese Normierung bleibt vorläufig bestehen. Die t-Intervalle rechter Seite in (8) seien mit J_{1s} bzw. J_{2s} bezeichnet; $J_{10} + J_{20}$ ist das Grundintervall.

An Stelle von (1) betrachten wir die gewöhnliche lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x} + 2\varkappa\dot{x} + \mu x = \begin{cases} \Gamma & \text{in } J_1 s, \\ -\Gamma & \text{in } J_2 s \end{cases} \quad (9)$$

---

[4]) Über das Auftreten solcher Stellen vgl. die Bemerkungen bei Painlevé: Leçons sur la théorie des équations différentielles. Paris 1897, S. 18 der Introduction.

[5]) Vgl. z. B. É. Goursat: Cours d'Analyse. Bd. 2, 5. Aufl. Paris 1933, S. 364 bis 384.

[6]) Mit $\bar{t} = t\frac{\pi}{a}$ ist (8) durch die für alle $\bar{t} > 0$ konvergente Fouriersche Reihe $\frac{4\Gamma a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\bar{t}}{2n+1}$ darstellbar. Hiervon sehen wir bewußt ab.

und suchen hierfür (periodische) Lösungen. Alle Schaltstellen von Γ sind auch solche von $\gamma \cdot \operatorname{sgn}(x+\varrho\dot{x})$, aber nicht umgekehrt; (1) und (9) sind also im allgemeinen nicht äquivalent.

Sind $\lambda_1 \neq \lambda_2$ die beiden reellen oder konjugiert komplexen Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2\varkappa\lambda + \mu = 0 \quad \text{mit} \quad \varkappa^2 \neq \mu \qquad (10),$$

so bilden bekanntlich $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$$\ddot{x} + 2\varkappa\dot{x} + \mu x = 0 \qquad (11).$$

Für $\varkappa^2 = \mu$, also $\lambda_1 = \lambda_2 = -\varkappa$, sind $e^{-\varkappa t}$ und $t \cdot e^{-\varkappa t}$ zwei linear unabhängige Integrale von (11). Partikularintegrale von (9) sind $x = \frac{\Gamma}{\mu}$ in J_{1s} und $x = \frac{-\Gamma}{\mu}$ in J_{2s}. Mit den zunächst unbestimmten Konstanten A_{1s}, B_{1s}, A_{2s} und B_{2s} haben darnach die allgemeinsten Lösungen von (9) die Form

$$x(t) = \begin{cases} A_{1s}\, e^{\lambda_1 t} + B_{1s}\, e^{\lambda_2 t} + \dfrac{\Gamma}{\mu} & J_{1s}, \\ & \text{in} \\ A_{2s}\, e^{\lambda_1 t} + B_{2s}\, e^{\lambda_2 t} - \dfrac{\Gamma}{\mu} & J_{2s} \end{cases} \quad \text{für } \varkappa^2 \neq \mu \qquad (12_1)$$

und

$$x(t) = \begin{cases} (A_{1s} + t\,B_{1s})\, e^{-\varkappa t} + \dfrac{\Gamma}{\mu} & J_{1s}, \\ & \text{in} \\ (A_{2s} + t\,B_{2s})\, e^{-\varkappa t} - \dfrac{\Gamma}{\mu} & J_{2s} \end{cases} \quad \text{für } \varkappa^2 = \mu \qquad (12_2).$$

Zur Bestimmung dieser Konstanten werde gefordert:

1. Stetigkeit der Integrale (12) und ihrer ersten nach t genommenen Ableitungen $y(t)$ in den Intervallen $J_{1s} + J_{2s}$, also

$$\left.\begin{aligned} x((2s+1)a)|_{J_{1s}} \equiv x((2s+1)a-0) &= x((2s+1)a+0) \equiv x((2s+1)a)|_{J_{2s}}, \\ y((2s+1)a-0) &= y((2s+1)a+0) \end{aligned}\right\} \qquad (13);$$

2. Periodizität mod. 2a in t von x und y, also

$$\left.\begin{aligned} x(2sa)|_{J_{1s}} \equiv x(2sa+0) &= x((2s+2)a-0) \equiv x((2s+2)a)|_{J_{2s}}, \\ y(2sa+0) &= y((2s+2)a-0) \end{aligned}\right\} \qquad (14).$$

In jedem der Fälle $\varkappa^2 \gtreqless \mu$ ergibt sich hieraus je ein lineares Gleichungssystem für die vier Unbekannten $A_{1s}, \ldots, B_{2s}$ mit den Koeffizientendeterminanten

$$D_s = (\lambda_1 - \lambda_2)^2\, e^{-2a\varkappa(4s+1)} \left(e^{2a(\lambda_1+\lambda_2)} - e^{2a\lambda_1} - e^{2a\lambda_2} + 1\right) \quad \text{für} \quad \varkappa^2 \neq \mu \qquad (15_1)$$

und

$$\hat{D}_s = e^{-2a\varkappa(4s+1)} \left(e^{-2a\varkappa} - 1\right)^2 \quad \text{für} \quad \varkappa^2 = \mu \qquad (15_2).$$

Beide Determinanten sind reell und von Null verschieden, D_s wegen $a > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\hat{D}_s$ wegen des reellen $a\varkappa \neq 0$. Die Konstanten werden

$$\left.\begin{aligned} A_{1s} &= -\frac{1}{D_s}\frac{2\Gamma}{\mu} e^{2a\{(\lambda_1+2\lambda_2)s-\varkappa\}}\, \lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)\left(e^{a(\lambda_1+2\lambda_2)} - e^{a\lambda_1} - e^{2a\lambda_2} + 1\right), \\ B_{1s} &= \frac{1}{D_s}\frac{2\Gamma}{\mu} e^{2a\{(2\lambda_1+\lambda_2)s-\varkappa\}}\, \lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)\left(e^{a(2\lambda_1+\lambda_2)} - e^{2a\lambda_1} - e^{a\lambda_2} + 1\right), \\ A_{2s} &= -A_{1s}\, e^{-a\lambda_1}, \qquad B_{2s} = -B_{1s}\, e^{-a\lambda_2} \end{aligned}\right\} \qquad (16_1)$$

für $\varkappa^2 \neq \mu$ und entsprechend

$$\left.\begin{aligned} A_{1s} &= \frac{-2\Gamma}{\varkappa^2}\frac{e^{2a\varkappa s}}{(e^{-2a\varkappa}-1)^2} \\ &\quad \times\left(1 - 2a\varkappa s + e^{-a\varkappa}(a\varkappa(2s-1)-1) + e^{-2a\varkappa}(a\varkappa(2s+2)-1) - e^{-3a\varkappa}(a\varkappa(2s+1)-1)\right), \\ B_{1s} &= \frac{-2\Gamma}{\varkappa}\frac{e^{2a\varkappa s}}{(e^{-2a\varkappa}-1)^2}\left(1 - e^{-a\varkappa} - e^{-2a\varkappa} + e^{-3a\varkappa}\right), \\ A_{2s} &= -(A_{1s} - a\,B_{1s})\, e^{a\varkappa}, \qquad B_{2s} = -B_{1s}\, e^{a\varkappa} \end{aligned}\right\} \qquad (16_2)$$

für $\varkappa^2 = \mu$.

Mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= +\sqrt{\mu-\varkappa^2} \\ \tau &= +\sqrt{\varkappa^2-\mu} \end{aligned} \quad \text{für} \quad \begin{aligned} \varkappa^2 &< \mu, \\ \varkappa^2 &> \mu \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (17)$$

folgen schließlich aus (16) nach einiger Zwischenrechnung für Anfangslage $x_0 = x(0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $y_0 = y(0)$ als Funktionen von a die in nachstehender Tabelle zusammengestellten Ausdrücke

	$\varkappa^2 < \mu$	$\varkappa^2 = \mu$	$\varkappa^2 > \mu$
$x_0 =$ $\left(\to -\frac{\Gamma}{\mu}\right)$	$\frac{\Gamma}{\mu\sigma}\cdot\frac{\varkappa\sin a\sigma-\sigma\,\mathfrak{Sin}\,a\varkappa}{\cos a\sigma+\mathfrak{Cos}\,a\varkappa}$	$\frac{\Gamma}{\varkappa^2}\cdot\frac{a\varkappa-\mathfrak{Sin}\,a\varkappa}{1+\mathfrak{Cos}\,a\varkappa}$	$\frac{\Gamma}{\mu\tau}\cdot\frac{\varkappa\,\mathfrak{Sin}\,a\tau-\tau\,\mathfrak{Sin}\,a\varkappa}{\mathfrak{Cos}\,a\tau+\mathfrak{Cos}\,a\varkappa}$
$y_0 =$ $(\to 0)$	$\frac{-\Gamma}{\sigma}\cdot\frac{\sin a\sigma}{\cos a\sigma+\mathfrak{Cos}\,a\varkappa}$	$\frac{-a\Gamma}{1+\mathfrak{Cos}\,a\varkappa}$	$\frac{-\Gamma}{\tau}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,a\tau}{\mathfrak{Cos}\,a\tau+\mathfrak{Cos}\,a\varkappa}$

(18).

Die in Klammern beigefügten Zahlen geben den entsprechenden Limes an für $a \to \infty$. Wird Γ durch $-\Gamma$ ersetzt, so ändern x_0 und y_0 nur ihre Vorzeichen.

Im Intervall J_{10} erhalten wir mit den Anfangswerten (18) für die Integrale $x(t)$ von (9) und deren Ableitungen $y(t)$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{-\varkappa t}\left\{\left(x_0-\frac{\Gamma}{\mu}\right)\cos\sigma t+\frac{y_0+\varkappa\left(x_0-\frac{\Gamma}{\mu}\right)}{\sigma}\sin\sigma t\right\}+\frac{\Gamma}{\mu}, \\ y(t) &= e^{-\varkappa t}\left\{y_0\cos\sigma t-\frac{\varkappa y_0+\mu x_0-\Gamma}{\sigma}\sin\sigma t\right\} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (19_1)$$

für $\varkappa^2 < \mu$;

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{-\varkappa t}\left\{\left(x_0-\frac{\Gamma}{\varkappa^2}\right)(1+\varkappa t)+y_0 t\right\}+\frac{\Gamma}{\varkappa^2}, \\ y(t) &= e^{-\varkappa t}\left\{y_0(1-\varkappa t)-\left(x_0-\frac{\Gamma}{\varkappa^2}\right)\varkappa^2 t\right\} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (19_2)$$

für $\varkappa^2 = \mu$;

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{-\varkappa t}\left\{\left(x_0-\frac{\Gamma}{\mu}\right)\mathfrak{Cos}\,\tau t+\frac{y_0+\varkappa\left(x_0-\frac{\Gamma}{\mu}\right)}{\tau}\mathfrak{Sin}\,\tau t\right\}+\frac{\Gamma}{\mu}, \\ y(t) &= e^{-\varkappa t}\left\{y_0\,\mathfrak{Cos}\,\tau t-\frac{\varkappa y_0+\mu x_0-\Gamma}{\tau}\mathfrak{Sin}\,\tau t\right\} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (19_3)$$

für $\varkappa^2 > \mu$.

Diese Lösungen lassen sich unter Zuhilfenahme von (16) für $t > a$ stetig fortsetzen und genügen für ganzzahliges n den Funktionalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} x(t+na) &= (-1)^n x(t), \\ y(t+na) &= (-1)^n y(t) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (20),$$

haben also die Periode $2a$ und den Mittelwert Null.

Zu jedem $a > 0$ gibt es ein reelles ϱ mit

$$x_0 + \varrho y_0 = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (21).$$

Wegen (20) bestehen für ganzzahliges $n \geq 1$ dann auch die Gleichungen

$$x(na) + \varrho y(na) = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (22).$$

Aus (21) und (18) folgen die von Γ unabhängigen Ausdrücke

$$\varrho = \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\mu}\left(\varkappa-\sigma\frac{\mathfrak{Sin}\,a\varkappa}{\sin a\sigma}\right) \\ &\frac{a\varkappa-\mathfrak{Sin}\,a\varkappa}{a\varkappa^2} \\ &\frac{1}{\mu}\left(\varkappa-\tau\frac{\mathfrak{Sin}\,a\varkappa}{\mathfrak{Sin}\,a\tau}\right) \end{aligned}\right. \quad \text{für } \varkappa^2 \left\{\begin{aligned} &< \mu, \\ &= \mu, \\ &> \mu \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (23).$$

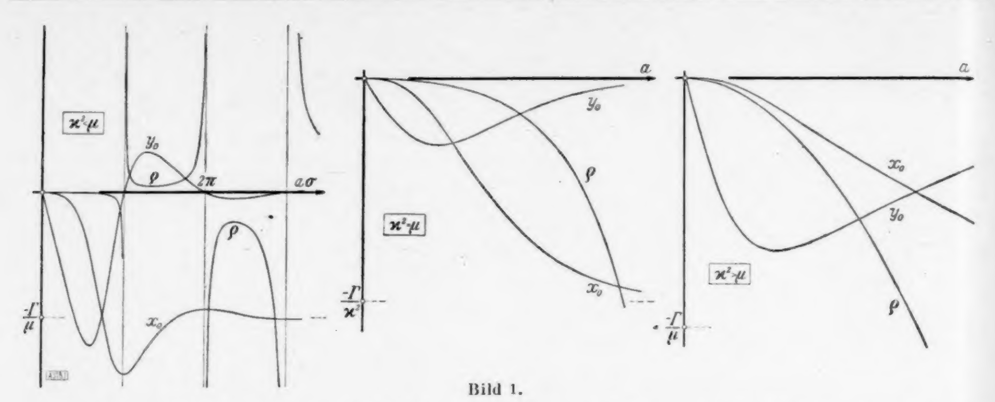


Bild 1.

Bild 1 zeigt für $\Gamma > 0$ in jedem der Fälle $\varkappa^2 \lesseqgtr \mu$ den Verlauf der Funktionen x_0, y_0 aus (18) und ϱ aus (23) in ihrer Abhängigkeit von $a > 0$, der einzigen noch Unbestimmten. Dieser Darstellung ist zu entnehmen, daß für $\varkappa^2 > \mu$ die Ergebnisse sich nur quantitativ von denjenigen für $\varkappa^2 = \mu$ unterscheiden.

Die Funktion

$$\zeta(t) = x(t) + \varrho\, y(t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

hat nach (22) die Eigenschaft, an ihren (reellen) Nullstellen $t = n\,a$ den Übergang von Γ nach $-\Gamma$ und umgekehrt zu steuern. An den Stellen $n a$ werden also die beiden Funktionen $f_\pm$ aus (7) ineinander übergeführt. Wenn $\zeta(t)$ nur die Nullstellen $n\,a$ hat (also die Intervalle $n\,a < t < (n+1)\,a$ nullstellenfrei sind), stimmen für $\Gamma = \gamma$ die periodischen Lösungen von (1) mit denen von (9) überein. Wir werden später sehen, daß zwischen den Wurzeln $n\,a$ und $(n+1)\,a$ der Gleichung $\zeta(t) = 0$ noch weitere Wurzeln liegen können.

Vermöge der Lösungen (12) lassen sich anschließend die Fragen nach der Existenz gesteuerter Systeme Σ_ϱ, in welchen es periodische Lösungen gibt, nach den Anfangswerten dieser Lösungen und den zugehörigen Perioden mühelos beantworten. Die hierzu notwendigen Auflösungen nach a der transzendenten Gln. (18) führen wir graphisch aus. In Bild 2 sind in der (x_0, y_0)-Ebene (kurz: Nullebene) die Kurven $x_0(y_0)$ und $a(y_0)$ aus Bild 1 wiedergegeben.

Bild 2.

Für $\varkappa^2 < \mu$ sind diese Funktionen unendlich vieldeutig. $x_0(y_0)$ ist eine den Nullpunkt mit vertikaler Tangente verlassende Spirale, die sich abzählbar unendlich oft um den Punkt $\left(\frac{-\Gamma}{\mu}, 0\right)$ herumwindet und schließlich in jenen Punkt konvergiert. Die x_0-Achse wird stets vertikal überschritten. Die Halbperiode $a(y_0)$, die auch auf der x_0-Achse aufgetragen ist, ergibt eine sich bis ins Unendliche erstreckende Kurve in Gestalt einer gedämpften Welle, welche die x_0-Achse ebenfalls abzählbar unendlich oft schneidet. Unter Benutzung nachstehender Vorschrift können die Punkte der Kurven x_0 und a umkehrbar eindeutig einander zugeordnet werden: Vom Nullpunkt ausgehend und auf der x_0- bzw. a-Kurve fortschreitend, numeriere man, jedesmal mit 1 beginnend, die Schnittpunkte dieser Kurven mit der x_0-Achse. Ferner ordne man die Bogenstücke dieser zwei Kurven zwischen je zwei gleichnumerierten Paaren konsekutiver Schnittpunkte einander zu, wobei die Bogenlängen vom Schnittpunkt kleinerer Ordnungszahl zu demjenigen größerer Ordnungszahl positiv gezählt werden.

Für $\varkappa^2 \geq \mu$ sind x_0 und a zweiwertige Funktionen von y_0; x_0 und a lassen sich aber auch hier nach obiger Vorschrift eineindeutig einander zuordnen.

Gl. (21) repräsentiert in der Nullebene ein durch den Koordinatenursprung gehendes Geradenbüschel; die einzelne Gerade G dieses Büschels (festes ϱ) hat die Steigung $-\frac{1}{\varrho}$, ihr Neigungswinkel δ bestimmt sich eindeutig aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{1}{\varrho} \qquad (0 \leq \delta < \pi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25).$$

Die vom Nullpunkt verschiedenen Schnittpunkte von G mit der x_0-Kurve geben Anfangslagen und nach Bild 2 Anfangsgeschwindigkeiten und Intervallängen der Lösungen (12).

Für $\varkappa^2 < \mu$ erhalten wir bei Beschränkung auf endliches ϱ solche Schnittpunkte für

$$-\infty < \varrho < 0 \quad \text{und} \quad \varrho^* \leq \varrho < \infty \quad \ldots \ldots \quad (26).$$

$\frac{-1}{\varrho^*} < 0$ ist dabei die Neigung der Tangente aus dem Ursprung an den dem Intervall $\pi \leq a\sigma \leq 2\pi$ zugeordneten Bogen der Kurve x_0. Je nach der Wahl von ϱ im Intervall (26) gibt es eine oder zwei oder drei usw., jedenfalls abzählbar viele Lösungen und keine für $0 \leq \varrho < \varrho^*$.

Ist $\varkappa^2 \geq \mu$, dann gibt es je eine Lösung für

$$-\infty < \varrho < 0 \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

und keine für $0 \leq \varrho < \infty$.

Aus diesen Lösungen von (9) sind nunmehr die periodischen Lösungen von (1) auszusondern; im folgenden bleibt es freilich dahingestellt, ob den Lösungen mit sehr großer Periode irgendeine physikalisch-technische Bedeutung zukommt.

Bislang war $t=0$ Aufschaltstelle von Γ. Die Zeitvariable werde (durch evt. Addition einer Konstanten) so normiert, daß $t=0$ Aufschaltstelle von $\gamma\,(>0)$ ist. Diese Normierung wird von jetzt ab stets beibehalten.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Eine Lösung von (1) mit den Anfangswerten x_0, y_0 existiert nur dann für $0 < t < \varepsilon$ (d. h. ist über $t=0$ hinaus fortsetzbar), falls die Steuerungsfunktion (24) mit $\zeta(0)=0$ für $t>0$ zunächst abnimmt. Es muß also die Ungleichung

$$\lim_{t=+0} \dot{\zeta}(t) < 0 \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

bestehen, daraus folgt

$$\zeta_1 = y_0^2 + 2\varkappa x_0 y_0 + \mu x_0^2 - \gamma x_0 \begin{cases} <0 \\ >0 \end{cases} \text{für } y_0 \begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases} \quad \ldots \ldots \quad (29).$$

In der Nullebene gibt $\zeta_1 = 0$ einen Kegelschnitt (Ellipse, Parabel bzw. Hyperbel für $\varkappa^2 \lesseqgtr \mu$), der die y_0-Achse im Ursprung tangiert und durch den Punkt $\left(\frac{\gamma}{\mu}, 0\right)$ hindurchgeht. In Bild 3 sind diese Kurven dargestellt; die dort schraffierten Gebiete geben den Wertevorrat von (28) an[7]. Durch diese Anfangswerte gehen Lösungskurven von (1), die vorerst nur in einem kleinen Zeitintervall definiert sind, während es uns darauf ankommt, Lösungen zu erhalten, deren Existenz für alle $t>0$ gesichert ist.

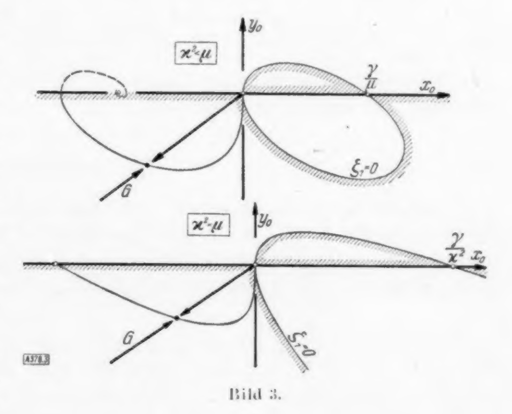


Bild 3.

Übertragen wir die x_0-Kurven von (9) aus Bild 2 in Bild 3, so scheiden die Anfangswerte x_0, y_0 von (9) mit $\Gamma = \gamma > 0$ für $\varrho^* \leq \varrho < \infty$ in (26) aus, weil sie die Ungleichung (28) nicht erfüllen[8]. Die verbleibenden Punkte der x_0-Kurven liegen sämtlich im Quadranten $x_0 < 0$, $y_0 < 0$ und genügen (28); Anfangswerte der periodischen Lösungen von (1) sind sie jedoch nur dann, wenn $\zeta(t) < 0$ für $0 < t < a$ ist.

[7]) Für $\varkappa^2 > \mu$ hat die Hyperbel $\zeta_1 = 0$ einen ganz im zweiten Quadranten gelegenen Zweig, der vom Nullpunkt endlichen Abstand hat; im Innern dieses Zweiges ist (28) erfüllt.

[8]) Daß (1) für $\varrho \geq 0$ und $\varkappa^2 < \mu$ keine periodische Lösung mit $a > 0$ hat, läßt sich nach einer mündlichen Mitteilung von H. Seifert auch folgendermaßen einsehen: Der Nullpunkt U der Phasenebene halbiert bei einer periodischen Lösung nach (20) die Strecke der Steuerungsgeraden zwischen $t=0$ und $t=a$, wobei der durch Steuerungsgerade und Phasenkurve in diesem Zeitintervall begrenzte Bereich konvex ist. Für die Aufschaltstelle von $\gamma > 0$ liegt U links vom Strudelpunkt S. Wegen der monotonen Abnahme des Abstandes eines laufenden Punktes $P(t)$ der Phasenkurve vom Strudelpunkt ist $\overline{SP(a)} < \overline{SP(0)}$, also der Winkel SUP(a) kleiner $\frac{\pi}{2}$. Da $\overrightarrow{US}$ die positive x-Richtung angibt (die positive y-Richtung geht daraus durch Drehung um $\pi/2$ um den Ursprung U hervor), liegt die Steuerungsgerade mit der Steigung $-\frac{1}{\varrho}$ notwendig im ersten und vierten Quadranten, d. h. es ist $\varrho < 0$.

Wegen $\zeta(0)=\zeta(a)=0$ genügt es zu zeigen, daß $\dot\zeta(t)$ im Intervall $0<t<a$ nur eine Nullstelle besitzt und die Bedingung (28) erfüllt. Durch direkte Rechnung aus (18), (19) und (23) folgt im Fall $\varkappa^2 \geq \mu$, daß $\dot\zeta(t)$ monoton steigend verläuft für jedes $a>0$. Ist $\varkappa^2<\mu$, so gilt zunächst

$$0 < a\,\sigma \leq \Delta \quad \text{(30)}.$$

Die zwischen π und 2π gelegene obere Schranke Δ für $a\,\sigma$ ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Ellipse

$$\zeta_1 \equiv y_0^2 + 2\varkappa\, x_0\, y_0 + \mu\, x_0^2 + \gamma\, x_0 = 0 \quad \text{(31)}$$

mit der x_0-Spirale in der Nullebene. (31) folgt aus (29) durch Vorzeichenumkehr von x_0 und y_0. Die Phasenkurve (s. u.) der (periodischen) Lösung von (9), deren Anfangswerte durch diesen Schnittpunkt definiert sind, tangiert nämlich die zugehörige Steuerungsgerade der Steigung $\frac{-1}{\bar\varrho}$ mit $\bar\varrho > \varrho^*$. Für $a\,\sigma > \Delta$ haben die Phasenkurven Schleifen, d. h. $\zeta(t)$ hat im Intervall $0<t<a$ mindestens eine Nullstelle. Um außer (30) noch die Ungleichung (28) zu erfüllen, muß schließlich die Ungleichung

$$0 < a\,\sigma < \pi \quad \text{(32)}$$

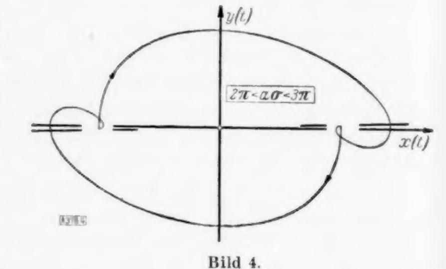


Bild 4.

bestehen. In Verbindung mit Bild 1 ist also nur der erste äußere Teilbogen der x_0-Kurve geometrischer Ort der Anfangswerte periodischer Lösungen in den gesteuerten Systemen Σ_ϱ. Wegen $\gamma>0$ ist $-\infty<\varrho<0$. Bild 4 zeigt die Phasenkurve einer ausgeschiedenen Lösung von (9) mit $2\pi < a\,\sigma < 3\pi$; sie ist keine periodische Lösung von (1).

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen: *In den gesteuerten Systemen Σ_ϱ mit $-\infty<\varrho<0$ hat (1) genau eine periodische Lösung mit explizit angebbaren Anfangswerten; für $\varkappa^2<\mu$ ist mit σ aus (17) die Halbperiode a durch (32) beschränkt.*

Die weitere Bedeutung dieser speziellen für alle $t \geq 0$ definierten Lösungen von (1) erhellt aus dem nächsten Abschnitt.

III. Stabilitätsnachweis.

Neben (1) betrachten wir das äquivalente System (4) im Phasenraum[9]). Dieser ist hierfür eine Ebene[10]), wenn als Koordinaten in einem rechtwinkligen kartesischen Achsensystem Lage x und Geschwindigkeit y aufgetragen werden. $x(t)$ und $y(t)$ ist die Parameterdarstellung der mit t orientierten Phasenkurve, ihre Neigung bestimmt sich durch

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{f}{y} \quad \text{(33)}.$$

Die durch den Koordinatenursprung gehende Steuerungsgerade $\zeta(t)=0$ der Steigung $-\frac{1}{\varrho}$ teilt den Phasenraum in zwei Halbebenen

$$\zeta(t) \equiv x(t) + \varrho\, y(t) \gtrless 0 \quad \text{(34)}.$$

In diesen hat nach (2) die verallgemeinerte Kraft (3) die Werte $f_\pm$ aus (7), worin nunmehr γ an Stelle von Γ zu schreiben ist.

Das Integral $x(t|\varrho)$ von (1) ist eine abteilungsweise zweimal stetig differenzierbare Funktion, die aus den Lösungen der Systeme (5) und (6) auf der Steuerungsgeraden zusammengesetzt ist; die Ableitungen in Punkten dieser Geraden existieren einseitig. Der Nullpunkt $x=y=0$ ist auszuschließen, weil für ihn die Signumbedingung nicht definiert wurde. Für eine stabile Bewegung $x(t|\varrho)$ werden wir vernünftigerweise fordern, daß ihre Phasenkurve

[9]) Vgl. G. D. Birkhoff: Einige Probleme der Dynamik. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 38 (1929), S. 1 bis 16.

[10]) Diese Ebene ist doppelt überdeckt und ähnlich einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche längs der Geraden $\zeta(t)=0$ durch Null und Unendlich verheftet zu denken.

für alle t definiert sei und ganz im Endlichen verlaufe, also z. B. ganz im Innern des Kreisringgebietes

$$0 < r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2 \quad (35)$$

liege bei beliebig großem, jedoch endlichem $R > 0$.

Die Phasenkurven der im Abschnitt II angegebenen periodischen Lösungen sind endliche, abteilungsweise stetig differenzierbare, geschlossene doppelpunktfreie Kurven; sie genügen sämtlich der notwendigen Bedingung (35).

Nach Voraussetzung ist die unabhängige Variable t monoton wachsend, die Bewegung also progressiv; über die retrograden Bewegungen, bei denen $-t$ monoton wächst, seien einige Bemerkungen kurz eingefügt:

Der Übergang von t nach $-t$ in (1) führt auf die Gleichung

$$\ddot{x} - 2\varkappa\dot{x} + \mu x + \gamma \operatorname{sgn}(x - \varrho\dot{x}) = 0 \quad (36).$$

Andererseits folgt (36) aus (1) durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} \varkappa & \varrho \\ -\varkappa & -\varrho \end{pmatrix} \quad (37).$$

Dieses Resultat bestätigen auch die Formeln (18) und (23), in (18) ist aber zu beachten, daß die Zeitmarke $t = 0$ der retrograden Bewegung in einer Abschaltstelle von γ liegt. Unter Zuhilfenahme dieser Bewegungen lassen sich die Lösungen von (1) diskutieren, wenn die ursprüngliche Voraussetzung $\varkappa > 0$ (die auch ferner beibehalten werden soll), durch $\varkappa < 0$ ersetzt wird. Da die unabhängige Variable in (1) nicht explizit vorkommt, ist im Phasenraum die Orientierung der retrograden Bewegungen derjenigen der progressiven Bewegungen entgegengesetzt.

Abweichend von [L] legen wir für das Folgende eine von Trefftz[11]) gegebene Stabilitätsdefinition zugrunde: *Eine Lösung der Differentialgleichung (1) heißt stabil, wenn sie für alle $t \geq 0$ erklärt und mit Einschluß ihrer ersten Ableitung nach t beschränkt ist, also (35) erfüllt, und jede hinreichend kleine, aber endliche Störung dieser Bewegung abklingt.* Diese Definition ist den Bewegungen in nichtkonservativen dynamischen Systemen angepaßt; ein derartiges System liegt wegen $\varkappa \neq 0$ in (1) vor.

Eine hiernach stabile Lösung tritt niemals isoliert auf[12]); falls die periodischen Lösungen von (1) stabil sind, müssen darnach in ihrer Nachbarschaft weitere stabile Lösungen vorkommen. Dies ist in der Tat der Fall. Es gilt nämlich der Satz: Die in II. angegebenen periodischen Lösungen von (1) mit den Anfangswerten x_0, y_0 sind stabil und die Nachbarlösungen $X(t)$ mit den Anfangswerten X_0, $Y_0 \neq y_0$, die durch

$$X_0 + \varrho Y_0 = 0 \quad (38)$$

und

$$-\infty < \frac{-R}{c\sqrt{1+\varrho^2}} < Y_0 < 0 \quad (39)$$

mit beliebig großem $R > 0$ und einer geeignet gewählten positiven Konstanten $c = c(\varkappa, \mu, \gamma)$ gegeben sein sollen, sind ebenfalls stabil und konvergieren für $t \to \infty$ gegen die zum gesteuerten System Σ_ϱ gehörige periodische Lösung.

Gl. (38) ist eine Folge unserer Zeitnormierung, (39) in Verbindung mit (38) enthält im wesentlichen das Trefftzsche Stabilitätsmaß. Die Anfangswerte X_0, Y_0 liegen nach (38) auf der Steuerungsgeraden, aber nicht notwendig in infinitesimaler Nachbarschaft von x_0, y_0. Wegen (27), (26), (32) und (39) ist $-\infty < \varrho < 0$.

Die Phasenkurve der periodischen Lösung des gesteuerten Systems Σ_ϱ durch die Anfangswerte x_0, y_0 sei die Kurve $ABCDA$ in Bild 5. Für $t > 0$ tritt die Phasenkurve der Nachbarbewegung $X(t)$ durch die Anfangswerte $P_0(X_0, Y_0)$ in die Halbebene $\zeta(t) < 0$ und genügt dem System (6). Wegen $Y_0 < 0$ nimmt $X(t)$ zunächst ab, erreicht für $Y(t) = 0$ ein endliches Minimum $> -R$ in $P_1(X < 0), Y = 0)$; anschließend verläuft die Phasenkurve in der Halbebene $Y > 0$, $X(t)$ nimmt zu. Zur Zeit $t = t_1 (> 0)$ wird die Steuerungsgerade in $P_2(X(t_1) > 0, Y(t_1) > 0)$ erreicht, um schließ-

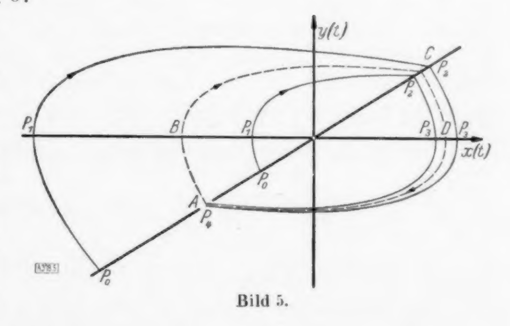


Bild 5.

[11]) E. Trefftz: Zu den Grundlagen der Schwingungstheorie. Math. Ann. Bd. 95 (1925), S. 307 bis 312. Dort auch die analytische Formulierung obiger Definition.

[12]) Für den Beweis vgl. Trefftz in loc. cit.[11]), S. 309.

lich für $t \to \infty$ in den Punkt $Y = 0$, $X = \frac{\gamma}{\mu}$ zu münden (Gleichgewichtslage von (6)). Dieser letzte Teil der Lösung (6) interessiert hierbei nicht. Wesentlich ist nur, daß P_0 und P_2 auf der Steuerungsgeraden durch den Nullpunkt $X = 0$, $Y = 0$ getrennt werden. Die Koordinaten von P_2 sind kleiner oder größer als die Absolutwerte der Koordinaten von P_0, je nachdem ob der Bogen $P_0 P_1 P_2$ außerhalb oder innerhalb des Bogens ABC der periodischen Lösung verläuft (d. h. $Y_0 \gtrless y_0$). Der Beweis hierfür folgt rein analytisch aus (19) und (23). Analog [L, pp. 321—322] läßt sich nämlich die Lösung $X(t)$ einschließen zwischen der periodischen Lösung in Σ_ϱ und derjenigen eines gesteuerten Systems Σ_{ϱ_0} mit der Anfangsgeschwindigkeit Y_0; man beachte dabei die eindeutige Bestimmtheit von (6) in der ganzen Phasenebene. Wegen $Y_0 \gtrless y_0$ werden $\varrho_0 \gtrless \varrho$ und nach (23) $a_0 \lessgtr a$. Daraus folgen außer der Existenz einer Nullstelle t_1 von $\zeta(t) = X(t) + \varrho\, Y(t)$ die Schranken

$$a_0 \gtrless t_1 \gtrless a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (40).$$

Die eindeutige Fortsetzung der Lösung (1) für $t > t_1$ wird durch das System (5) in die Halbebene $\zeta(t) > 0$ gegeben. Wir erhalten den Bogen $P_2 P_3 P_4$, der zur Zeit $t = t_2 (> t_1)$ die Steuerungsgerade trifft (evtl. nur einmalig für $\varkappa^2 \geq \mu$) und für $t \to \infty$ gegen $\left(\frac{-\gamma}{\mu}, 0\right)$ konvergiert. Für $t > t_2$ interessiert diese Bewegung nicht. Wird vergleichsweise die periodische Lösung eines gesteuerten Systems Σ_{ϱ_1} mit der Anfangsgeschwindigkeit $Y(t_1)$ und der Halbperiode a_1 herangezogen (t_1 ist jetzt Abschaltstelle von γ), so gelten die Ungleichungen $\varrho_0 \gtrless \varrho_1 \gtrless \varrho$, also $a_0 \lessgtr a_1 \lessgtr a$, und für t_2 erhalten wir die Schranken

$$a_0 + a_1 \gtrless t_2 \gtrless 2a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (41);$$

die Strecke $\overline{P_2 P_4}$ enthält den Nullpunkt im Innern.

Für $t \geq t_2$ ist (1) durch das System (6) fortsetzbar, usw. In wiederholter Anwendung dieses Verfahrens erhalten wir für (1) eine spiralförmige Phasenkurve, welche bei $t \to \infty$ von außen $\left(\text{für } \frac{-R}{c\sqrt{1+\varrho^2}} < Y_0 < y_0\right)$ oder von innen (für $y_0 < Y_0 < 0$) gegen die periodische Lösung des Systems Σ_ϱ konvergiert. Die Steuerungsfunktion $\zeta(t)$ hat abzählbar unendlich viele einfache Nullstellen $t_0, t_1, t_2, \ldots$. Aus (40), (41) und den weiteren analogen Ungleichungsreihen folgt, daß die Differenz je zweier konsekutiver Nullstellen gegen $a (> 0)$ strebt. Die Lösungen mit (38) und (39) erfüllen also (35) und die Trefftzsche Forderung des Abklingens der Störungen.

Wir behaupten, daß Gl. (1) nur diese stabilen Lösungen besitzt.

1. Für $\varrho = 0$ existiert keine periodische Lösung, der Fall $a = 0$ (unendlich große Frequenz) wurde ausgeschlossen. Die Bewegungen in Σ_0 sind instabil. Für $Y_0 \geq 0$ ist (28) nicht erfüllt, es sei also $-\frac{R}{c} < Y_0 < 0$. Dann ist (1) durch (6) mit dem Anfangswert $P_0 (X_0 = 0, Y_0 < 0)$ für $t > 0$ fortsetzbar. $X(t)$ nimmt zunächst von Null an monoton ab, erreicht für $Y(t) = 0$ ein endliches Minimum in $P_1 (X < 0, Y = 0)$; anschließend verläuft die Phasenkurve in der Halbebene $Y > 0$, $X(t)$ nimmt zu. Zur Zeit $t = t_1 (> 0)$ wird die Steuerungsgerade (hier die Y-Achse) in $P_2 (X(t_1) = 0, Y(t_1) > 0)$ erstmalig erreicht. Es ist $Y(t_1) < |Y_0|$, da P_2 näher am Punkt $\left(\frac{\gamma}{\mu}, 0\right)$ liegt als P_0. Über P_2 hinaus wird (1) durch (5) fortgesetzt, usw. Für $t \to \infty$ strebt die Phasenkurve nach Null, bleibt also nicht stets im Innern von (35) mit $r > 0$.

2. Es sei $\varrho > 0$. Nach II. gibt es in diesem Fall keine periodischen Lösungen.

a) Y_0 mit $\frac{-R}{c\sqrt{1+\varrho^2}} < Y_0 < 0$ sei die Anfangsgeschwindigkeit einer Bewegung, die für $t = 0$ im Phasenpunkt $P_0 (X_0, Y_0)$ mit $X_0 + \varrho\, Y_0 = 0$ beginnen möge. Damit diese durch (1) beschrieben werden kann, muß nach (29) P_0 im Außengebiet von $\zeta_1 = 0$ liegen. Da $\zeta_1 = 0$ eine Kurve zweiter Ordnung ist und im Ursprung die Y-Achse tangiert, schneiden alle Geraden G, die durch den Ursprung gehen und im Quadranten $X_0 > 0$, $Y_0 < 0$ der Nullebene liegen, diesen Kegelschnitt. Es sei also P_0 im Bereich $\zeta_1 > 0$ gewählt; (1) ist dann zunächst

durch (6) fortsetzbar bis t_1, der ersten auf $t=0$ folgenden Schaltstelle, deren Existenz analog [*L*, p. 323] sich beweisen läßt[13]). Der Punkt $P_1(X(t_1), Y(t_1))$ auf der Geraden $\zeta=0$ liegt dem Nullpunkt näher als P_0; P_0 und P_1 werden aber nicht notwendig durch diesen getrennt. Liegt der Nullpunkt zwischen P_0 und P_1 und liegt überdies P_1 im (29) entsprechenden Bereich für die Abschaltstelle von γ, so ist (1) über t_1 hinaus durch (5) fortsetzbar; es gibt eine Schaltstelle t_2, usw. Die Möglichkeit der Fortsetzung ist jedoch höchstens endlich oft gegeben; die Folge der absoluten Beträge der Ordinaten $Y(t_n)$ dieser Schaltstellen hat nämlich keinen positiven Häufungspunkt (es müßte sonst eine periodische Lösung existieren, gegen welche die Bewegung durch P_0 konvergierte). Andererseits nimmt diese Folge monoton ab, es gibt daher ein erstes $Y(t_p)$ derart, daß der Punkt $P_p(X(t_p), Y(t_p))$ auf der Steuerungsgeraden, jedoch nicht im Bereich (29) oder dem ihm entsprechenden einer Abschaltstelle liegt. Die Bewegung ist hier wegen $Y(t_p)\neq 0$ nicht beendet, sie hört aber auf, für $t>t_p$ der Differentialgleichung (1) zu genügen.

b) Es sei Y_0 mit $0\leq Y_0<\frac{R}{c\sqrt{1+\varrho^2}}$ gegeben. Für $\varkappa^2\leq\mu$ ist eine reelle Bewegung für $t>0$ nicht durch (1) zu beschreiben. Falls $\varkappa^2>\mu$ ist (d. h. $\zeta_1=0$ eine Hyperbel), läßt sich (1) fortsetzen, wenn Y_0 derart gewählt wird, daß $P_0(X_0, Y_0)$ im Bereich $\zeta_1<0$ liegt. Es sei also P_0 innerer Punkt des Hyperbelastes $\zeta_1=0$ im zweiten Quadranten der Nullebene; die durch P_0 gehende Steuerungsgerade schneidet diese Kurve. Analog a) tritt dann nach endlicher Zeit t_q eine Schaltstelle P_q auf, für welche die Bewegung zwar nicht beendet, aber durch (1) nicht fortsetzbar wird.

3. Es verbleiben die Lösungen mit $\varrho<0$, $Y_0>0$. Liegt $P_0(X_0, Y_0)$ im Innern von $\zeta_1=0$, ist also (29) erfüllt, dann ist (1) für alle $t\geq 0$ definiert. Nach den Ausführungen zu Bild 3 liegt P_0 in einem endlichen Bereich der Nullebene und (1) ist durch (6) zunächst für $t>0$ fortsetzbar. Wegen $Y_0>0$ nimmt $X(t)$ zu; für endliches $t_1>0$ schneidet die Phasenkurve erstmalig die Steuerungsgerade in $P_1(X(t_1)>0, Y(t_1)>0)$. Die Phasenkurve liegt für $0<t<t_1$ z. B. ganz im Innern eines Kreises um $\left(\frac{\gamma}{\mu}, 0\right)$ mit einem Radius, der gleich dem Abstand dieses Punktes von P_0 ist. Über P_1 hinaus — einer Abschaltstelle von γ, welche außerhalb $\zeta_1=0$ liegt — setzen wir (1) durch (5) fort. Der nächstfolgende Schaltpunkt P_2 (Bild 6) hat die Koordinaten $X(t_2)<0$, $Y(t_2)<0$[14]). Von P_2 an gilt unser früher bewiesener Satz, die Lösung konvergiert gegen die periodische Lösung in Σ_ϱ, gehört also von t_2 ab zur Klasse der bereits genannten stabilen Lösungen.

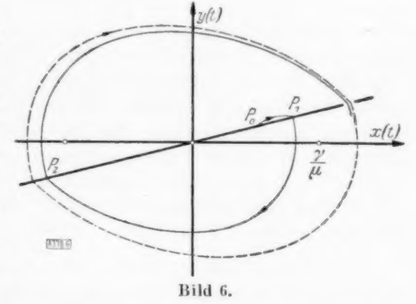


Bild 6.

Es ist noch anzumerken, daß in den zuletzt betrachteten Anfangswerten P_0 in 3. eine zweite stabile Lösung von (1) beginnen kann. Hierfür ist allerdings $t=0$ Abschaltstelle von γ. Die zweite Phasenkurve durch P_0 besteht zunächst aus einem Bogen derjenigen Schar, welcher $\widehat{P_1P_2}$ in Bild 6 angehört; die weitere Fortsetzung ist dann evident. Für beide Lösungen stellt sich der gleiche Endzustand ein, nämlich die eindeutig vorhandene periodische Lösung in Σ_ϱ. Ebenso gibt es eine zweite Lösung durch die für eine Aufschaltstelle zulässigen Anfangswerte P_0 im Fall (2b) mit $\varkappa^2>\mu$ und $\varrho>0$; aber auch diese Bewegung ist nur bis zu einem endlichen t fortsetzbar. Zur Vermeidung solcher Mehrdeutigkeiten ist daher erforderlich, das Gebiet $\zeta_1<0$ in (29) und das entsprechende bei einer Abschaltstelle als Anfangswerte auszuschließen. 378

[13]) Vgl. G. D. Birkhoff: Dynamical Systems. Americ. Math. Soc. Publ. Bd. 9, New York 1927, S. 123 bis 128.

[14]) Vgl. Birkhoff in loc. cit. [13]).

Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 Nr. 4 Aug. 1942

Natürliche Schrittweite bei numerischer Integration von Differentialgleichungssystemen.

Von *L. Collatz* in Karlsruhe.

Die Brauchbarkeit der Interpolationsverfahren, die sich zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen sehr bewährt haben, hängt stark von der Wahl der benutzten Schrittweite ab. Es gibt eine ausgesprochene „günstigste Schrittweite“. Es wird eine Methode angegeben, nach der man bei einem beliebigen System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung eine „natürliche Schrittweite“ bestimmen kann. Die bei der Rechnung tatsächlich benutzte Schrittweite sollte in ihrem Verlauf dem Verlauf der natürlichen Schrittweite möglichst angepaßt werden.

1. Einleitung.

Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung sind in neuerer Zeit die nach Adams und Störmer benannten Verfahren mehr und mehr angewandt worden; von diesen Verfahren zeichnen sich die Interpolationsverfahren gegenüber den Extrapolationsverfahren durch eine wesentlich höhere Genauigkeit bei nur mäßig vergrößerter Rechenarbeit aus. Es zeigt sich nun, daß die Durchführung der Interpolationsverfahren empfindlich von der Größe der zugrunde gelegten Schrittweite abhängt; es gibt bei vorgelegter Differentialgleichung oder bei einem System von Differentialgleichungen eine ausgesprochen günstigste Schrittweite h. Rechnet man nämlich mit kleinerer, etwa der halben Schrittweite, so verläuft die Rechnung zwar glatt und ohne Schwierigkeiten, aber man hat wegen der größeren Anzahl von Schritten zu dem gleichen Kurvenstück praktisch die doppelte Rechenarbeit zu leisten. Rechnet man aber mit der doppelten Schrittweite, so nehmen die höheren Differenzen nicht genügend stark ab, die Iterationen konvergieren zu langsam, man muß dreimal und unter Umständen noch öfters das Schema durchrechnen, ehe die Zahlen zum Stehen kommen, und die letzten mitgeführten Differenzen zeigen ein so starkes Schwanken, daß man zu ihrer Genauigkeit nicht mehr das nötige Vertrauen haben kann.

In einem solchen Falle ist es stets besser, die Schrittweite zu verkleinern, etwa auf die halbe Schrittweite überzugehen (der Übergang auf die halbe Schrittweite ist rechnerisch bequem ausführbar[1]). Der Bestimmung der in dieser Weise beschriebenen günstigsten Schrittweite, die weiterhin als „natürliche Schrittweite“ bezeichnet wird, soll die folgende Arbeit dienen. Bei Kenntnis der natürlichen Schrittweite kann man dann die bei der Rechnung benützte Schrittweite diesem Verlauf jeweils durch Schrittverdoppelung bzw. Schritthalbierung anpassen.

Ferner kann die Bestimmung der natürlichen Schrittweite dazu dienen, bei Integration eines Differentialgleichungssystems von vornherein die ungefähr benötigte Schrittanzahl und damit die erforderliche Rechenarbeit abzuschätzen[2]).

Die natürliche Schrittweite bezieht sich auf das laufende Verfahren, dagegen nicht — und darauf sei ausdrücklich hingewiesen — auf die Berechnung eines Anfangsstückes, bei der die Iterationen in der Regel viel schlechter konvergieren. Man rechnet beim Anfangsstück zweckmäßig mit einer zwei- bis dreimal so kleinen Schrittweite als beim laufenden Verfahren.

Soweit die Beweise ähnlich denen der Arbeiten von G. Schulz[3]) verlaufen, konnten sie hier kurz gefaßt werden. Auch bei Verwendung anderer Integrationsverfahren, z. B. des Runge-Kutta-Verfahrens ist es nicht ratsam, stets mit gleicher Schrittweite h zu rechnen. Man kann die hier ermittelte „natürliche Schrittweite“ auch als Anhaltspunkt für die Wahl der Schrittweite bei diesen anderen Verfahren verwenden.

---

[1]) L. Collatz-R. Zurmühl: Beiträge zu den Interpolationsverfahren der numerischen Integration von Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung, Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942), S. 42 bis 55. Dort sind die Verfahren zusammengestellt und verschiedene Fragen der praktischen Handhabung besprochen.

[2]) Die Arbeit entstand im Anschluß an größere numerische Rechnungen, die am Institut f. prakt. Mathem. d. Techn. Hochschule Darmstadt ausgeführt wurden. Bei diesen Rechnungen wurde die hier vorgeschlagene Bestimmung der „natürlichen Schrittweite“ erprobt.

[3]) G. Schulz: Z. angew. Math. Mech. Bd. 12 (1932), S. 44 bis 59 und Bd. 14 (1934), S. 224 bis 234.

2. Eine einzelne Differentialgleichung 1. Ordnung.

In dieser Nummer sind einige bekannte Tatsachen zusammengestellt, auf Einzelheiten bei den Verfahren kann hier nicht eingegangen werden.

Bei der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2.1)$$

genüge $f(t, x)$ einer Lipschitzbedingung

$$|f(t, x) - f(t, x^*)| \leqq K\,|x - x^*| \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2.2),$$

wobei in praktischen Fällen gewöhnlich K durch den größten Betrag der Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ innerhalb des in Betracht kommenden Bereiches ersetzt wird: $K = k_{\max}$ mit $k = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$. Es seien bereits Näherungswerte x_i für die exakten Werte $x(t_i)$ der Lösungsfunktion $x(t)$ an den Stellen t_i für $i = \ldots n-2,\ n-1,\ n$ berechnet. Bei fester Schrittweite h ist $t_i = t_0 + i\,h$. Der Wert x_{n+1} wird durch Verbesserung eines Ausgangswertes $x_{n+1}^{(0)}$ nach der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1}^{(\nu+1)} = x_{n-1} + h\left(2 f_n + \frac{1}{3} \nabla^2 f_{n+1}^{(\nu)}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2.3)$$

gewonnen, wobei die üblichen Abkürzungen

$$f_n = f(t_n, x_n), \quad f_n^{(\nu)} = f\left(t_n, x_n^{(\nu)}\right), \quad \nabla f_n = f_n - f_{n-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2.4),$$

gebraucht sind. Dann gilt[4])

1. Die bei dem Verfahren nötigen Iterationen zur Verbesserung der Werte von x_{n+1} konvergieren, wenn $Kh < 3$ ist.

2. Es läßt sich eine Fehlerabschätzung durchführen: der Fehler $x_n - x(t_n)$ kann abgeschätzt werden durch

$$|x_n - x(t_n)| \leqq c_1 + c_2\, z^n,$$

wobei c_1 und c_2 von n unabhängig sind. Das Anwachsen des Fehlers kann also nicht stärker sein als das Anwachsen der Potenz z^n. Die Größe z hängt nur von dem Produkt Kh ab (Bild 1). Es ist

$$Kh = W(z) = \frac{3(z^2 - 1)}{z^2 + 4z + 1} \quad \ldots \ldots \quad (2.5).$$

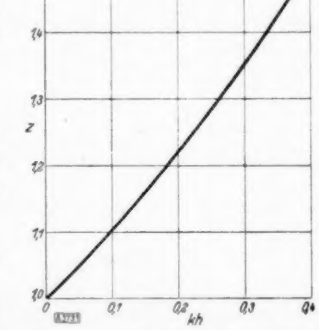


Bild 1. Abhängigkeit der Größe z von Kh.

Für $Kh \to 3$ geht $z \to \infty$. Die Zahl z darf natürlich nicht zu groß sein, z. B. schon $z = 1{,}3$ (das entspricht $Kh = 0{,}26$) ist reichlich groß.

Bei Verwendung eines anderen Verfahrens, z. B. des gewöhnlichen Adamschen Interpolationsverfahrens[5]), sind die Verhältnisse genau dieselben, nur tritt bei 1. an Stelle $Kh < 3$ die Bedingung $Kh < 8/3$, und bei 2. ist z aus einer anderen Kurve abzulesen[6]).

Für kleine Werte von h ist bei Benutzung der Formel (2.3) angenähert

$$Z = 1 + Kh.$$

Einführung der „natürlichen Schrittweite". Als wesentlich für die Konvergenz der Iterationen (d. i. gleichbedeutend mit der genügend starken Abnahme der Differenzen im Differenzenschema) als auch für das Anwachsen der Fehlerschranke bei dem einzelnen Schritt erscheint also das Produkt Kh. Hat man nun bei einer Lösungskurve stark veränderliche Werte von k, so wird man, um längs der ganzen Kurve mit ungefähr denselben Verhältnissen zu arbeiten, die Schrittweite h nicht konstant lassen, sondern ebenfalls variieren, am bequemsten je nach Erfordernis zur doppelten bzw. zur halben Schrittweite übergehen, so daß kh längs der ganzen Kurve von derselben Größenordnung ist. So kann man den Wert

$$h_\nu = \frac{\text{konst.}}{k} = \frac{C}{k} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2.6)$$

---

[4]) Der Gedankengang der Fehlerabschätzung ist bei G. Schulz[3]) durchgeführt. Für die Gl. (2.3) findet man das Ergebnis in Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942), S. 47.

[5]) G. Schulz: Formelsammlung zur praktischen Mathematik. Berlin und Leipzig 1937, Sammlung Göschen, Bd. 1110, S. 118.

[6]) Die Kurve ist dargestellt Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942), S. 47.

als „natürliche Schrittweite" einführen. Der Wert von C kann nicht allgemein festgelegt werden; bei großen Genauigkeitsansprüchen wird man C kleiner wählen als bei Überschlagsrechnungen. Als Anhaltspunkt sei für C der Wertebereich 0,05 bis 0,15 genannt.

Beispiel: Die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x) = \frac{x}{t-1} + 2x^2$$

hat bei der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ die Lösung $x = \frac{1}{1-t}$. Hier ist $k = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \left|\frac{1}{t-1} + 4x\right| = \frac{3}{|1-t|}$. Bild 2 zeigt die Lösung x und die Größe $\frac{0{,}1}{k}$ als Funktionen von t. Die Lösung besitzt bei $t = 1$ einen Pol, die Schrittweite muß bei Annäherung an die Stelle $t = 1$ kleiner und kleiner gemacht werden in Übereinstimmung mit dem Verlauf der natürlichen Schrittweite, die für $t \to 1$ gegen den Wert 0 strebt.

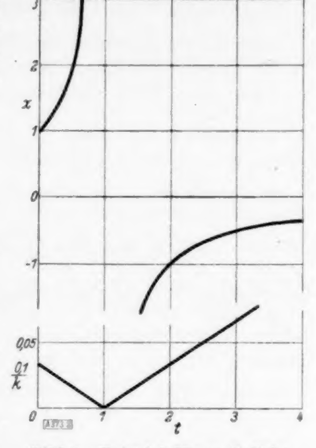


Bild 2. Beispiel für natürliche Schrittweite.

3. Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Bei dem System von m gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad \ldots \ldots \quad (3.1)$$

tritt an Stelle der einen Lipschitzkonstanten K eine ganze Matrix $\mathfrak{K}$ von m^2 Lipschitzkonstanten

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} K_{11}, & K_{12} \ldots\ldots & K_{1m} \\ K_{21}, & K_{22} \ldots\ldots & K_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{m1}, & K_{m2} \ldots\ldots & K_{mm} \end{pmatrix} \quad \ldots \ldots \quad (3.2),$$

die definiert sind durch das Bestehen der Ungleichungen

$$|f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) - f_i(t, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)| \leq \sum_{l=1}^{m} K_{il} |x_l - x_l^*|.$$

Für praktische Zwecke kann man die K_{il} aus den Beträgen der partiellen Ableitungen berechnen, setzt also

$$K_{il} = (k_{il})_{\max} \quad \text{mit} \quad k_{il} = \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\right| \quad \ldots \ldots \quad (3.3).$$

Konvergenz der Iterationen. Die Iterationen bei Berechnung der Näherungen $x_{i,n+1}$ an der Stelle t_{n+1} werden wie bei (2.3) nach der Vorschrift ausgeführt

$$x_{i,n+1}^{(\nu+1)} = x_{i,n-1} + h\left(2 f_{i,n} + \frac{1}{3} \nabla^2 f_{i,n+1}^{(\nu)}\right) = x_{i,n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{i,n-1} + 4 f_{i,n} + f_{i,n+1}^{(\nu)}\right) \quad \ldots \quad (3.4).$$

Es ist also

$$\left|x_{i,n+1}^{(\nu+1)} - x_{i,n+1}^{(\nu)}\right| = \frac{h}{3}\left|f_{i,n+1}^{(\nu)} - f_{i,n+1}^{(\nu-1)}\right| \leq \frac{h}{3} \sum_{l=1}^{m} K_{il} \left|x_{l,n+1}^{(\nu)} - x_{l,n+1}^{(\nu-1)}\right|.$$

Hier kann man das Ungleichheitszeichen fortlassen, wenn man die $x_{i,n+1}^{(\nu)}$ durch obere Schranken $X_{i,n+1}^{(\nu)}$ ersetzt.

Faßt man die $X_{i,n+1}^{(\nu)}$ als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ auf, so gilt

$$\mathfrak{x}^{(\nu+1)} - \mathfrak{x}^{(\nu)} = \frac{h}{3} \mathfrak{K}(\mathfrak{x}^{(\nu)} - \mathfrak{x}^{(\nu-1)}) = \ldots = \left(\frac{h}{3}\right)^{\nu} \mathfrak{K}^{\nu} (\mathfrak{x}^{(1)} - \mathfrak{x}^{(0)}).$$

Der Grenzvektor

$$\mathfrak{x} = \lim_{\nu \to \infty} \mathfrak{x}^{(\nu)} = \mathfrak{x}^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{x}^{(\nu)} - \mathfrak{x}^{(\nu-1)}) = \mathfrak{x}^{(0)} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{h}{3}\right)^{\nu} \mathfrak{K}^{\nu}\right)(\mathfrak{x}^{(1)} - \mathfrak{x}^{(0)})$$

existiert und die Konvergenz der Iterationen ist damit gesichert, wenn die Matrix $\frac{h}{3}\mathfrak{K}$ charakteristische Zahlen hat, die dem Betrag nach sämtlich kleiner als 1 sind. Der größte Betrag der charakteristischen Zahlen von $\mathfrak{K}$ sei K, dann lautet also eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Iterationen

$$K h < 3 .$$

Fehlerabschätzung. Es werden nun die Fehler eingeführt

$$\varepsilon_{i,n} = x_{i,n} - x_i(t_n) .$$

Dann gilt, wenn man von (3.4) unter Fortlassen der Indizes (ν) und ($\nu + 1$) die Gleichung

$$x_i(t_{n+1}) = x_i(t_{n-1}) + \int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f_i(t, x_i, \ldots x_m)\, \mathrm{d}t$$

abzieht und die Koeffizienten

$$\beta_0 = \beta_2 = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \frac{4}{3}$$

einführt:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{i,n+1} = \varepsilon_{i,n-1} + h \sum_{\varrho=0}^{2} \beta_\varrho \left[f_i(t_{n+1}, x_{k,n+1-\varrho}) - f_i(t_{n+1-\varrho}, x_k(t_{n+1-\varrho})) \right] \\ + \left[h \sum_{\varrho=0}^{2} \beta_\varrho f_i(t_{n+1-\varrho}, x_k(t_{n+1-\varrho})) - \int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f_i \,\mathrm{d}t \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3.5).$$

Auf der rechten Seite kann die erste eckige Klammer mit Hilfe der Lipschitzkonstanten abgeschätzt werden, während die zweite den Quadraturfehler $C_{i,n}$ darstellt. Für den Quadraturfehler $C_{i,n}$ erhält man die Schranke (Fehlerglied der Simpsonregel)[7])

$$|C_{i,n}| \leqq C_i = \frac{h^5}{90} \left| \frac{\mathrm{d}^4 f_i}{\mathrm{d} t^4} \right|_{\max},$$

wobei die vierte Abteilung für praktische Zwecke gewöhnlich durch den vierten Differenzenquotienten ersetzt wird. Somit erhält man aus (3.5)

$$|\varepsilon_{i,n+1} - \varepsilon_{i,n-1}| \leqq h \sum_{\varrho=0}^{2} \beta_\varrho \sum_{l=1}^{m} K_{il} |\varepsilon_{l,n+1-\varrho}| + C_i \quad \ldots \ldots \quad (3.6).$$

Schreibt man in (3.6) das Gleichheitszeichen, so erhält man für obere Schranken $X_{i,n}$ der Größen $\varepsilon_{i,n}$ das System von Differenzengleichungen

$$X_{i,n+1} - X_{i,n-1} = h \sum_{\varrho=0}^{2} \beta_\varrho \sum_{l=1}^{m} K_{i,l} |X_{l,n+1-\varrho}| + C_i \quad \ldots \ldots \quad (3.7).$$

Hiermit ist im Prinzip die Fehlerabschätzung geleistet; kennt man die Fehler der Anfangswerte, so kann man rekursiv obere Schranken für die weiteren Fehler berechnen. Man kann mit Hilfe der charakteristischen Zahlen der Matrix $\mathfrak{K}$ eine Fehlerschranke in geschlossener Form aufstellen. Die Gln. (3.7) stellen ein inhomogenes System von Differenzengleichungen dar. Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist $X_{i,n} = \text{konst.} = \mathrm{d}_i$, wobei die d_i aus

$$\sum_{l=1}^{m} K_{il}\, \mathrm{d}_l = -\frac{C_i}{2h}$$

zu berechnen sind. Die Determinante der K_{il} ist dabei als von Null verschieden vorauszusetzen. Zu der so erhaltenen speziellen Lösung des inhomogenen Systems ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems von (3.7) zu addieren. Die Lösung wird in üblicher Weise in der Form angesetzt

$$X_{i,n} = B_i \cdot z^n ;$$

damit erhält man

$$B_i(z^{n+1} - z^{n-1}) = h \sum_{\varrho=0}^{2} \beta_\varrho \sum_{l=1}^{m} K_{il} B_l z^{n+1-\varrho} \quad \ldots \ldots \quad (3.8).$$

[7]) G. Kowalewski: Interpolation und genäherte Quadratur, Leipzig und Berlin 1932, S. 72.

Die Determinante dieses für die B_i homogenen Gleichungssystems stellt gleich Null gesetzt eine Bestimmungsgleichung für z dar, deren absolut größte Wurzel z verwendet wird; denn es soll an Stelle der allgemeinen Lösung des Systems nur eine majorisierende Lösung aufgestellt werden. Die Lösung ist dann nur brauchbar, wenn $z > 1$ ist. Führt man die Funktion ein

$$W(z) = \frac{z^2 - 1}{\sum\limits_{\varrho=0}^{2}{}' \beta_\varrho z_\varrho} \qquad (3.9),$$

so kann man (3.8) in der Gestalt schreiben

$$B_i \cdot W(z) = h \sum_{l=1}^{m}{}' K_{il} B_l .$$

Dieses Gleichungssystem besagt: $W(z)$ ist eine charakteristische Zahl der Matrix $h\mathfrak{K}$. Da $W(z)$ für $z > 1$ monoton wächst und der größte Wert von z zu verwenden ist, kommt auch die größte charakteristische Zahl K der Matrix $\mathfrak{K}$ in Frage.

Da $W(z)$ für $1 < z < \infty$ nur Werte zwischen 0 und 3 annimmt, muß

$$W(z) = hK < 3$$

sein. Das ist die gleiche Bedingung für die Schrittweite h, wie sie sich aus der Konvergenzbetrachtung für die Iterationen ergab.

Zusammenfassend stellt man fest, daß bei einem System von Differentialgleichungen dieselben Verhältnisse herrschen wie bei einer einzelnen Differentialgleichung; man hat lediglich an Stelle der einen Lipschitzkonstanten K hier die größte charakteristische Zahl K der Matrik $\mathfrak{K}$ der Lipschitzkonstanten zu setzen. Alles andere, sogar die Funktion $W(z)$ bleibt genau erhalten. Man wird daher auch hier entsprechend (2.6) die Größe $h_\nu = \frac{\text{konst.}}{k}$ als natürliche Schrittweite einführen, wobei k die größte charakteristische Zahl der Matrix mit den Elementen $k_{i,l}$ ist. Man nimmt also jetzt als Lipschitzkonstanten nicht mehr die Maximalwerte längs der ganzen Lösungskurve, sondern verwendet als K_{il} die Beträge der Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_l}$ an der Stelle, an der man die natürliche Schrittweite bestimmen will und vergleicht das vorgegebene System von Differentialgleichungen mit einem System, bei dem die Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_l}$ konstante Werte haben, und zwar gerade die gleichen Beträge wie das vorgelegte System im herausgegriffenen Augenblick. Als Vergleichsmittel dient das Anwachsen der Fehlerschranke, also die Größe z. Die hier gegebene Definiton von h_ν enthält natürlich noch eine gewisse Willkür; man könnte z. B., wie es sonst in der Theorie der Differentialgleichungen oft geschieht, an Stelle der Matrix (3.2) nur m Lipschitzkonstanten $K_1 K_2 \ldots, K_m$ durch

$$|f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) - f_i(t, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)| \leqq K_i \sum_{l=1}^{m} |x_l - x_l^*|$$

einzuführen. Dann tritt an Stelle der größten charakteristischen Zahl K der Matrix $\mathfrak{K}$ einfach die Summe der K_i. Die numerischen Rechnungen zeigen jedoch, daß man hierbei die Verhältnisse nur sehr viel gröber erfaßt als bei Benutzung der charakteristischen Zahlen.

4. Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Bei dem System

$$\ddot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2 \ldots x_m, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_m) \quad (i = 1, 2, \ldots m) \qquad (4.1)$$

mögen die gegebenen Funktionen f_i den Lipschitzbedingungen genügen

$$|f_i(t, x_1, x_2 \ldots x_m, \dot{x}_1 \ldots \dot{x}_m) - f_i(t, x_1^*, \ldots x_m^*, \dot{x}_1^*, \ldots \dot{x}_m^*)| \qquad (4.2),$$
$$\leqq \sum_{l=1}^{m} (M_{il} |x_l - x_l^*| + L_{il} |\dot{x}_l - \dot{x}_l^*|).$$

Es werden Näherungswerte x_n und $\dot{x}_n$ für die exakten Werte $x(t_n)$ und $\dot{x}(t_n)$ an der Stelle $t_n = t_0 + nh$ berechnet nach dem Interpolationsverfahren der zentralen Differenzen (Berechnung der $(\nu + 1)$-ten Näherung aus der ν-ten nach):

$$\left.\begin{aligned} x_{i,n+1}^{(\nu+1)} &= 2\,x_{i,n} - x_{i,n-1} + h^2 \sum_{\varrho=0}^{2} \alpha_\varrho f_{i,n+1-\varrho}^{(\nu)} \\ \dot{x}_{i,n+1}^{(\nu+1)} &= \dot{x}_{i,n-1} \qquad\quad + h \sum_{\varrho=0}^{2} \beta_\varrho f_{i,n+1-\varrho}^{(\nu)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.3).$$

Dabei sind die Konstanten

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{12}, \quad \alpha_1 = \frac{10}{12}, \quad \beta_0 = \beta_2 = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \frac{4}{3}.$$

$f_i(t_{n+1-\varrho})$ und $f_{i,n+1-\varrho}^{(\nu)}$ bedeuten den exakten Wert von (4.1) an der Stelle $t = t_{n+1-\varrho}$ und seinen im Verlauf der Rechnung dafür erhaltenen Näherungswert in der ν-ten Näherung.

Konvergenz der Iterationen. Entsprechend zu 3 erhält man hier für die Änderungen $\varepsilon_i^{(\nu)}$ und $\zeta_i^{(\nu)}$

$$\varepsilon_i^{(\nu)} = x_{i,n+1}^{(\nu+1)} - x_{i,n+1}^{(\nu)} = \frac{h^2}{12}\left(f_{i,n+1}^{(\nu)} - f_{i,n+1}^{(\nu-1)}\right),$$

$$\zeta_i^{(\nu)} = \dot{x}_{i,n+1}^{(\nu+1)} - \dot{x}_{i,n+1}^{(\nu)} = \frac{h}{3}\left(f_{i,n+1}^{(\nu)} - f_{i,n+1}^{(\nu-1)}\right).$$

Schätzt man die rechten Seiten mit Hilfe der Lipschitzbedingungen (4.2) ab, so folgt

$$\left|\varepsilon_i^{(\nu)}\right| \leq \frac{h^2}{12} \sum_{l=1}^{m} \left(M_{il}\left|\varepsilon_l^{(\nu-1)}\right| + L_{il}\left|\zeta_l^{(\nu-1)}\right|\right),$$

$$\left|\zeta_i^{(\nu)}\right| \leq \frac{h}{3} \sum_{l=1}^{m} \left(M_{il}\left|\varepsilon_l^{(\nu-1)}\right| + L_{il}\left|\zeta_l^{(\nu-1)}\right|\right).$$

Faßt man obere Schranken $E_i^{(\nu)}$ und $Z_i^{(\nu)}$ der Größen $\varepsilon_i^{(\nu)}$ und $\zeta_i^{(\nu)}$ als Komponenten eines $2\,m$-dimensionalen Vektors $\mathfrak{v}^{(\nu)}$ auf

$$\mathfrak{v}^{(\nu)} = \left(Z_1^{(\nu)}, \ldots, Z_m^{(\nu)}, E_1^{(\nu)}, \ldots, E_m^{(\nu)}\right),$$

so genügt $\mathfrak{v}^{(\nu)}$ der Gleichung

$$\mathfrak{v}^{(\nu)} = \frac{h}{3}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{v}^{(\nu-1)},$$

wobei $\mathfrak{A}$ die Matrix ist:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} L_{11} & \ldots & L_{1m} & M_{11} & \ldots & M_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{m1} & \ldots & L_{mm} & M_{m1} & \ldots & M_{mm} \\ \frac{h}{4} L_{11} & \ldots & \frac{h}{4} L_{1m} & \frac{h}{4} M_{11} & \ldots & \frac{h}{4} M_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{h}{4} L_{m1} & \ldots & \frac{h}{4} L_{mm} & \frac{h}{4} M_{m1} & \ldots & \frac{h}{4} M_{mm} \end{pmatrix}.$$

Ist $K_{\mathfrak{A}}$ die dem Betrag nach größte charakteristische Zahl der Matrix $\mathfrak{A}$, welche nach einem Satz der Algebra, vgl. Ziffer 6, positiv ist, so ist also die Konvergenz der Iterationen gesichert, wenn

$$K_{\mathfrak{A}} \cdot \frac{h}{3} < 1$$

ist. Sie ist nicht mehr gesichert, wenn $K_{\mathfrak{A}}$ den Wert $\frac{3}{h}$ annimmt, wenn also

$$\det\left(\mathfrak{A} - \frac{3}{h}\,\mathfrak{E}\right) = 0$$

ist ($\mathfrak{E}$ ist die Einheitsmatrix). Eine kurze Umformung ergibt

$$\det\left(\mathfrak{A}-\frac{3}{h}\,\mathfrak{E}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^m\begin{vmatrix} L_{11}-\frac{3}{h} & \dots & L_{1m} & M_{11} & \dots\dots & M_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{m1} & \dots & L_{mm}-\frac{3}{h} & M_{m1} & \dots\dots & M_{mm} \\ 1 & \dots & 0 & -\frac{4}{h} & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots\dots & -\frac{4}{h} \end{vmatrix} \quad \dots\dots (4.4).$$

Man kann diese Determinante auch auf die Gestalt bringen

$$\det(\mathfrak{B}-\mathfrak{E})=0,$$

wobei $\mathfrak{B}$ eine m-reihige quadratische Matrix mit den Elementen $\frac{h^2}{12}M_{ik}+\frac{h}{3}L_{ik}$ ist.

Fehlerabschätzung. Es gilt für die exakten Werte

$$x_i(t_{n+1})=2x_i(t_n)-x_i(t_{n-1})+h^2\sum_{\varrho=0}^{2}\alpha_\varrho f_i(t_{n+1-\varrho})+D_{in},$$

$$\dot{x}_i(t_{n-1})= \qquad x_i(t_{n-1})+h\sum_{\varrho=0}^{2}\beta_\varrho f_i(t_{n+1-\varrho})+D_{in}^*,$$

wobei D_{in} und D_{in}^* abschätzbare und als bekannt anzusehende Quadraturfehler bedeuten. Zieht man diese von (4.3) ab (unter Fortlassen der Zeiger (ν) und $(\nu+1)$), so erhält man für die Fehler

$$\varepsilon_{i,n}=x_{i,n}-x_i(t_n);\qquad \zeta_{i,n}=\dot{x}_{i,n}-\dot{x}_i(t_n),$$

bei Abschätzung der Differenz der Funktionswerte mit Hilfe der Lipschitzkonstanten:

$$\left.\begin{aligned} |\varepsilon_{i,n+1}-2\varepsilon_{i,n}+\varepsilon_{i,n-1}| &\leq h^2\sum_{\varrho=0}^{2}\alpha_\varrho\sum_{l=1}^{m}(M_{il}|\varepsilon_{l,n+1-\varrho}|+L_{il}|\zeta_{l,n+1-\varrho}|)+|D_{in}| \\ |\zeta_{i,n+1}\qquad -\zeta_{i,n-1}| &\leq h\sum_{\varrho=0}^{2}\beta_\varrho\sum_{l=1}^{m}(M_{il}|\varepsilon_{l,n+1-\varrho}|+L_{il}|\zeta_{l,n+1-\varrho}|)+|D_{in}^*| \end{aligned}\right\}\quad . \ (4.5).$$

Diese Zeilen bleiben richtig, wenn man die Absolutstriche fortläßt, Gleichheitszeichen an Stelle der Zeichen $\leq$ setzt und an Stelle der $\varepsilon_{i,n}$, $\zeta_{i,n}$ obere Schranken $E_{i,n}$, $Z_{i,n}$ für sie schreibt. Dann entstehen Differenzengleichungen, die außer einer speziellen Lösung der inhomogenen Gln. (4.5) (als die man im allgemeinen $E_{i,n}=\text{konst.}=E_i$, $Z_{i,n}=\text{konst.}=Z_i$ verwenden kann), noch den zu (4.5) gehörigen homogenen Gleichungen genügende nach einem Potenzgesetz anwachsende Lösungen haben. Daher wird der Ansatz gemacht:

$$E_{i,n}=A_i z^n,\quad Z_{i,n}=B_i z^n \quad \dots\dots\dots\dots (4.6).$$

Es ergeben sich dann verschiedene Werte z, und für das Anwachsen der Fehlerschranke entscheidend ist das z mit dem größten Betrage. Beim Einsetzen von (4.6) in (4.5) erhält man

$$A_i(z^2-2z+1)=h^2\sum_{\varrho=0}^{2}\alpha_\varrho\sum_{l=1}^{m}(M_{il}A_l z^{2-\varrho}+L_{il}B_l z^{2-\varrho}),$$

$$B_i(z^2-1)\qquad =h\sum_{\varrho=0}^{2}\beta_\varrho\sum_{l=1}^{m}(M_{il}A_l z^{2-\varrho}+L_{il}B_l z^{2-\varrho}).$$

Mit den Abkürzungen

$$V(z)=\frac{z^2-2z+1}{h^2\sum_{\varrho=0}^{2}\alpha_\varrho z^{2-\varrho}},\quad W(z)=\frac{z^2-1}{h\sum_{\varrho=0}^{2}\beta_\varrho z^{2-\varrho}},\quad Q(z)=\frac{V(z)}{W(z)}\quad \dots\dots (4.7)$$

wird daraus:

$$A_i V(z)=B_i W(z)=\sum_{l=1}^{m}(A_l M_{il}+B_l L_{il}).$$

Diese $2m$ homogenen Gleichungen für die A_i und B_i haben nur eine nichttriviale Lösung, wenn ihre Determinante verschwindet. Sie lautet:

$$0 = \begin{pmatrix} L_{11} - W(z) & \dots & L_{1m} & M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{m1} & \dots & L_{mm} - W(z) & M_{m1} & \dots & M_{mm} \\ 1 & \dots & 0 & -Q(z) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & -Q(z) \end{pmatrix} \quad \dots \dots \quad (4.8).$$

Aus dieser Gleichung ist z zu berechnen. Die dem Betrage nach größte Wurzel z bestimmt dann gemäß Gl. (4.6) das Wachstum der Fehlerschranken. Die tatsächliche Berechnung von z aus (4.8) ist im allgemeinen eine mühsame Aufgabe. Beschränkt man sich jedoch auf kleine Schrittweiten h, also $h \ll 1$, so kann man mit dem Ansatz

$$z = 1 + Kh$$

in (4.7) und (4.8) eingehen; man erhält

$$V(z) = K^2, \quad W(z) = Q(z) = K$$

und (4.8) geht in eine gewöhnliche Säkulargleichung über, K ist dann die größte charakteristische Zahl der Matrix $\mathfrak{K}$ mit nichtnegativen Elementen:

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1m} & M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{m1} & \dots & L_{mm} & M_{m1} & \dots & M_{mm} \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \dots \quad (4.9).$$

Zur Abrundung soll noch auf einen Zusammenhang der Matrix $\mathfrak{K}$ mit der Matrix $\mathfrak{A}$ bei der Konvergenzuntersuchung der Iterationen hingewiesen werden. Die Fehlerabschätzung versagt, wenn z gegen ∞ rückt. Für $z \to \infty$ geht nach (4.7)

$$V(z) \to \frac{12}{h^2}, \quad W(z) \to \frac{3}{h}, \quad Q(z) \to \frac{4}{h}.$$

Setzt man diese Werte in (4.8) ein, so unterscheidet sich die Determinante nur durch den konstanten Faktor $\left(\frac{4}{3}\right)^m$ von der Determinante (4.4).

Natürliche Schrittweite. Bei veränderlichen Werten der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_l}$ und $\frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_l}$ vergleicht man das vorgelegte System an einer herausgegriffenen Stelle t mit einem solchen, bei dem diese Ableitungen konstant sind und setzt: $M_{il} = \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\right|$, $L_{il} = \left|\frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_l}\right|$. Für das Anwachsen der Fehlerschranke (4.6) (und zwar genau genommen für das Vergleichssystem) ist nach dem Vorangehenden das Produkt Kh entscheidend. Die größte charakteristische Zahl K der Matrix (4.9) ist dann eine Funktion der herausgegriffenen Stelle t. Es liegt daher nahe, als natürliche Schrittweite den Ausdruck

$$h_\nu = \frac{\text{konst.}}{K}$$

einzuführen, wobei über den Wert der Konstanten dasselbe gilt wie am Schluß von Ziffer 2.

5. Systeme von Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung.

Liegt ein System von m Gleichungen zweiter und p Gleichungen erster Ordnung vor,

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_i &= f_i(t, x_1, x_2 \ldots x_m, y_1, \ldots y_p, \dot{x}_1, \dot{x}_2 \ldots \dot{x}_m) \quad (i = 1, 2 \ldots m) \\ \dot{y}_i &= f_{m+i}(t, x_1, x_2, x_m, y_1 \ldots y_p, \dot{x}_1, \dot{x}_2 \ldots \dot{x}_m) \quad (i = 1, 2 \ldots p) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (5.1),$$

so setzt man $y_i = \dot{x}_{m+i}$ und hat dann ein System von $m+p$ Gleichungen 2. Ordnung, auf das sich die Theorie von Nr. 4 anwenden läßt. Schreibt man die zugehörige Determinante (4.8) auf, so stehen in den letzten p Spalten nur Nullen bis auf die Zahlen $-Q(z)$ in der Diagonalen; man kann daher die letzten p Spalten und Zeilen fortlassen und hat beim Ansatz $z = 1 + Kh$ wieder K als größte charakteristische Zahl der Matrix $\mathfrak{K}$ zu nehmen:

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} L_{11} \ldots\ldots & L_{1,m+p} & M_{11} \ldots\ldots & M_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{m+p,1} \ldots & L_{m+p,m+p} & M_{m+p,1} \ldots & M_{m+p,m} \\ 1 \ldots\ldots & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \underbrace{0 \ldots\ldots 1}_{m \text{ Spalten}} & \underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{p \text{ Spalten}} & \underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{m \text{ Spalten}} & \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m+p \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ Zeilen} \end{matrix} \quad \ldots\ldots (5.2)$$

oder in leichtverständlicher symbolischer Abkürzung

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} \left|\frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \dot{x}_k}\right| & \left|\frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial y_k}\right| & \left|\frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial x_k}\right| \\ \left|\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{x}_k}\right| & \left|\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_k}\right| & \left|\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial x_k}\right| \\ \mathfrak{E} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix enthält alle bisherigen als Spezialfälle.

6. Berechnung der charakteristischen Zahl vom größten Betrag.

Eine m-reihige quadratische Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (6.1)$$

hat m charakteristische Zahlen $K_1, K_2, \ldots K_m$; das sind diejenigen Werte von K, für die das homogene Gleichungssystem

$$\sum_{l=1}^{m} a_{il} x_l = K x_i \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

(oder in Matrizenschreibweise $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = K\mathfrak{x}$) eine von identisch Null verschiedene Lösung $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots x_m)$ hat. Die bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Lösung heißt der zu der betreffenden Zahl gehörige Eigenvektor. Bei uns hat nun die Matrix (6.1) nur positive (oder verschwindende) Elemente. Für solche Matrizen gilt der Satz: Diejenige von den m charakteristischen Zahlen, die den größten Absolutbetrag hat, ist positiv und heißt die Maximalwurzel von $\mathfrak{A}$ (sie kann auch eine mehrfache Nullstelle von $\det(\mathfrak{A} - K\mathfrak{E}) = 0$ sein). Es gibt zu ihr einen Eigenvektor, dessen Komponenten nichtnegativ und nicht alle Null sind (Satz von **Frobenius**)[8].

Zur praktischen Bestimmung von K wähle man einen beliebigen Ausgangsvektor $\mathfrak{u}$ mit nur positiven Komponenten $u_1, u_2, \ldots u_m$ und bilde den Vektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{A}\mathfrak{u}$ mit den Komponenten

$$v_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} u_k .$$

[8]) G. Frobenius: Sitzungsber. Preuß. Akad. d. Wissensch. Math.-phys. Klasse, Berlin 1912, 1. Halbband, S. 456 bis 477, insbes. S. 457.

Die Quotienten $\mu_i = \frac{v_i}{u_i}$ aus den einzelnen Komponenten von $\mathfrak{v}$ und den entsprechenden von $\mathfrak{u}$ werden nicht für alle i den gleichen Wert haben; man sieht aber leicht, wo man durch Abändern der einzelnen Komponenten erreichen kann, daß die Größt- und Kleinstwerte der Quotienten μ_i enger zusammenrücken. Es gilt der Satz, daß die Maximalwurzel K stets zwischen dem Größtwert und Kleinstwert der Quotienten liegt[9]).

$$\text{Min}\, \mu_i \leq K \leq \text{Max}\, \mu_i .$$

Zudem kommt es nicht auf sehr hohe Genauigkeit an, es genügt für die natürliche Schrittweite, daß man die erste geltende Stelle sicher hat. Bei etwas Übung läßt sich die Bestimmung der größten charakteristischen Zahl auf eine geltende Stelle sehr rasch durchführen.

Beispiel: Vorgelegt sei die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 1{,}3 & 1 \\ 4{,}2 & 0{,}9 & 2{,}1 \\ 0{,}6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiß man gar nichts über den Eigenvektor, so wird man etwa von $\mathfrak{u} = (1, 1, 1)$ ausgehen; dann wird

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{u} = (2{,}5;\ 7{,}2;\ 2{,}6),$$

bei den neuen Komponenten ist die mittlere viel größer als die anderen beiden, also wird jetzt etwa $\mathfrak{u} = (1, 2, 1)$ gewählt, das ergibt $\mathfrak{v} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{u} = (3{,}8; 8{,}1; 4{,}6)$. Die Quotienten sind 3,8; 4,05; 4,6.

Zur Herabminderung des letzten Quotienten 4,6 wird man die letzte Zahl 1 bei $\mathfrak{u}$ erhöhen und zur Erhöhung des ersten Quotienten 3,8 wird man die erste Zahl 1 bei $\mathfrak{u}$ etwas verkleinern. So erhält man $\mathfrak{u} = (0{,}96; 2; 1{,}12)$; $\mathfrak{v} = (3{,}912; 8{,}184; 4{,}576)$. Quotienten: 4,075; 4,092; 4,086; das genügt für den vorliegenden Zweck vollauf; es ist also $K \approx 4{,}08$, wobei die Dezimale 8 natürlich unsicher ist. Mit Sicherheit weiß man nur

$$4{,}075 \leq K \leq 4{,}092 .$$

7. Rechnungsgang.

Vorgelegt sei ein System (3.1), (4.1) oder (5.1) von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung. Zunächst bestimmt man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ $\left(\text{bzw. } \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_k},\right.$ soweit diese gebraucht werden$\left.\right)$, entweder durch Differenzieren oder durch Bildung von Differenzenquotienten (z. B. bei nur empirisch gegebenen Zusammenhängen). Die Werte dieser partiellen Ableitungen werden für eine Anzahl Zeitpunkte $t = t^{(1)}, t^{(2)} \ldots$ ermittelt, nämlich für die Werte von t, für die man die natürliche Schrittweite bestimmen will. Mit den Beträgen der Ableitungen kann man die Matrix $\mathfrak{K}$ aufstellen, (3.2) bzw. (4.9) oder (5.2), indem man

$$K_{il} = \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\right|, \quad L_{il} = \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\right|, \quad M_{il} = \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\right|$$

setzt. Für jeden Zeitpunkt $t = t^{(j)}$ wird die größte charakteristische Zahl K der zugehörigen Matrix $\mathfrak{K}$ nach Nr. 6 ermittelt. Dann gibt $\frac{\text{konst.}}{K} = \frac{C}{K}$ den zeitlichen Verlauf der natürlichen Schrittweite. Der Wert von C hängt von der gewünschten Genauigkeit ab und ist bei größeren Genauigkeitsansprüchen kleiner zu nehmen. Als grober Anhaltspunkt sei der Wert $C = 0{,}1$ genannt.

Die Schrittweite, mit der man tatsächlich rechnet, wird man der natürlichen Schrittweite möglichst anpassen, wobei man im ersten Teile der Rechnung eher mit kleineren Schrittweiten arbeitet und am Schlusse der Rechnung größere Schritte nehmen darf, weil die dabei entstehenden Ungenauigkeiten sich nicht mehr so stark auswirken können wie anfangs entstandene Fehler. Die hier bestimmte natürliche Schrittweite bezieht sich nicht auf die Anfangsiteration für die Ausgangswerte, die stets besser mit kleinerer Schrittweite vorgenommen wird.

[9]) L. Collatz: Mathem. Zeitschr. (1942) erscheint demnächst.

Über gleichwahrscheinliche Aufteilungen.

Von *H. Hadwiger* in Bern.

Ein statistisches Schema, das im Gebiet der angewandten Mathematik verschiedenartige Realisierungen erfährt, wird durch die gleichwahrscheinliche Zerlegung einer positiven Größe in positive Teile geliefert. In dieser Arbeit wird die Wahrscheinlichkeit, daß die Teilgrößen alle eine gegebene Schranke nicht überschreiten, einer eingehenden Studie unterzogen und ferner der Erwartungswert für die größte Teilgröße ermittelt.

1. Problemstellung und Überblick.

Die Summe von n unabhängigen natürlichen Zahlen sei

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s \qquad (1).$$

Für die Summanden x_ν sei jede der Zahlen $0, 1, 2, \ldots s$ gleichwahrscheinlich, oder anders ausgedrückt, jede Lösung der diophantischen Gl. (1) sei mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zu erwarten. Wir wollen in einem solchen Fall von „gleichwahrscheinlichen Aufteilungen" sprechen. Es muß mit besonderem Nachdruck auf diese Voraussetzung hingewiesen werden, um einer Verwechslung mit den in der mathematischen Statistik häufig untersuchten „statistischen Aufteilungen" vorzubeugen. Diese Aufteilungen werden so erzeugt, daß s Elemente auf n Plätze verteilt, und die einzelnen x_ν in (1) als Besetzungszahlen der Plätze interpretiert werden. In diesem Falle sind, wie bekannt, die verschiedenen Aufteilungen (1) keineswegs mehr gleichwahrscheinlich, sondern müssen mit den Gewichten

$$\left(\frac{1}{n}\right)^s \frac{s!}{x_1!\, x_2! \ldots x_n!} \qquad (2)$$

versehen werden, vorausgesetzt, daß die Zuteilungswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Plätze alle gleich sind.

Wir stellen nun die folgenden Aufgaben an die Spitze unserer Untersuchungen:

A) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $X_n(\xi)$, daß $\frac{x_\nu}{s} \leq \xi$ ausfällt für alle $\nu = 1, 2, \ldots n$?

B) Wie groß ist der Erwartungswert Θ_n für $\frac{x_0}{s}$, wo x_0 die größte der Zahlen x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ bezeichnet?

Während die Behandlung dieser Fragestellungen bei statistischen Aufteilungen auf erhebliche Schwierigkeiten zu führen scheint[1]), zeigt es sich, daß bei gleichwahrscheinlichen Aufteilungen eine befriedigende Lösung erzielt werden kann.

Wir werden das oben gestellte Problem in kontinuierlicher Gestalt formulieren, und dann die exakten Lösungen entwickeln.

Wir stellen zunächst kurz die Hauptergebnisse zusammen:

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$X_n(\xi) = 2(n-1)!\, \xi^{n-1}\, \Phi_n\left(\frac{2}{\xi} - n\right) \qquad (3),$$

wobei als Hilfsfunktion

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \cos x t\, dt \qquad (4)$$

gewählt wurde. Ferner erhält man für den gesuchten Erwartungswert

$$\Theta_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \qquad (5),$$

also eine bemerkenswert einfache Formel. Nach einem bekannten Theorem gilt für große n die asymptotische Formel

$$\Theta_n \sim \frac{1}{n}(C + \log n) \qquad (6),$$

wo C die Eulersche Transzendente $C = 0{,}577215\ldots$ bezeichnet.

[1]) Vgl. z. B. Titeica, Serban: Sur un problème de probabilités. Bull. Math. Phys. Ecole polytechn. Bucarest. Bd. 10 (1939), S. 57 bis 64.

Die Hilfsfunktionen (4) stellen symmetrische Verteilungen dar, die in einem gewissen Fragenkreis der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fehlertheorie eine wichtige Rolle spielen.

Nach einer Formel von A. Sommerfeld[2]) stellt

$$\frac{\sqrt{n}}{2}\,\Phi_n(2\sqrt{n}\,a) \quad (7)$$

das $(n-1)$ dimensionale Volumen des Schnittes des n dimensionalen Einheitwürfels mit einer senkrecht zu einer Würfeldiagonalen stehenden „Ebene" im Abstand a vom Würfelmittelpunkt dar.

Nach einer bekannten Methode kann diese Volumformel mit Hilfe des Diskontinuitätsfaktors von Dirichlet

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\cos x t\,\mathrm{d}t = \begin{Bmatrix} 0 & (|x|>1) \\ \frac{1}{2} & (|x|=1) \\ 1 & (|x|<1) \end{Bmatrix} \quad (8)$$

hergeleitet werden[3]).

Nach G. Pólya[4]) gilt die Grenzwertformel

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\Phi_n(a\sqrt{n}) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,e^{-\frac{3a^2}{2}} \quad (9)$$

eine Konvergenz, die in jedem endlichen Intervall gleichmäßig stattfindet.

Die Funktionen (4) können durch Polynome dargestellt werden, und zwar ist nach einer Formel von Laplace[5])

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2^n(n-1)!}\sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n\pm x}{2}\right]}(-1)^\lambda\binom{n}{\lambda}(n\pm x-2\lambda)^{n-1} \quad (10),$$

wo beidemal das gleiche Vorzeichen gewählt werden soll[6]).

Durch geeignete Interpretation des beim gestellten Problem vorliegenden Sachverhaltes kann die Lösung (3) auf Grund der Formel (7) von Sommerfeld gewonnen werden. Wir schlagen jedoch hier einen andern Weg ein, um auf rein analytischem Wege zum Ziel zu gelangen.

2. Integraldarstellungen.

Wenn wir in (1) $x_\nu = \xi_\nu s$ setzen, so gilt

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n = 1 \quad (11).$$

Wir fassen nun die ξ_ν als kontinuierliche Variable auf, und geben damit dem oben gestellten Problem die neue endgültige Form, in welcher die gesuchte Funktion als geometrische Wahrscheinlichkeit, der gesuchte Erwartungswert als geometrischer Mittelwert neu definiert wird.

Wie üblich stützt sich die Wahrscheinlichkeitsdefinition auf ein Maß, das durch ein Riemannsches Integral gegeben wird. Mit Rücksicht auf die wesentliche Voraussetzung, wonach jeder möglichen Aufteilung (11) das nämliche Gewicht zukommen soll, haben wir als Maß für eine kontinuierliche Menge von Aufteilungen das Integral

$$\int \mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\ldots\mathrm{d}\xi_{n-1} \quad (12)$$

zu setzen, wo sich die Integration über die genannte Menge zu erstrecken hat. Die Existenz des Integrals wird dabei vorausgesetzt, was einer entsprechenden Beschränkung der zur Messung zugelassenen Aufteilungsmengen gleichkommt.

Bezeichnet J_n das durch (12) erklärte Maß sämtlicher Aufteilungen (11), so definieren wir als Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Aufteilung zu einer vorgegebenen Teilmenge M gehört, den Integralquotienten

[2]) A. Sommerfeld: Eine besonders anschauliche Ableitung des Gaußschen Fehlergesetzes. Boltzmann Festschrift. Leipzig 1904, S. 848. Vgl. weiter: V. Brun: Norsk. Mat. Tidskr. Bd. 14 (1932), S. 81 bis 92; P. Hertz: Math. Ann. Bd. 74 (1913), S. 153 bis 203.

[3]) J. M. David: Zur Dirichletschen Methode des Diskontinuitäts-Faktors. Diss. Zürich 1918, S. 45 bis 49.

[4]) G. Pólya: Berechnung eines bestimmten Integrals. Math. Ann. Bd. 74 (1913), S. 204 bis 212.

[5]) Théorie analytique des probabilités, S. 169.

[6]) In der von G. Pólya (vgl. das Zitat in Fußnote 4) angegebenen Formel fehlt infolge Druckfehlers der Faktor $\binom{n}{\lambda}$.

$$\frac{1}{J_n}\int\limits_M d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1} \quad \ldots \quad (13).$$

Das Maß aller Aufteilungen

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n=\zeta \quad \ldots \quad (14),$$

das wir mit $J_n(\zeta)$ bezeichnen wollen, ist leicht zu finden. Nach (12) gilt zunächst

$$J_n(\zeta)=\int d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1} \quad \ldots \quad (15),$$

wo die Integration über das Gebiet

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n-1}\leqq\zeta, \quad \xi_\nu\geqq 0\,(\nu=1,2,\ldots n-1)$$

zu erstrecken ist. Indem man zuerst $\xi_{n-1}=\eta$ festhält, und erst nach erfolgter Integration über die übrigen Veränderlichen noch über η integriert, gewinnt man die Rekursion

$$J_n(\zeta)=\int\limits_0^\zeta J_{n-1}(\zeta-\eta)\, d\eta \quad \ldots \quad (16),$$

woraus sich die Formel

$$J_n(\zeta)=\frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!} \quad \ldots \quad (17)$$

ergibt. Insbesondere ist also

$$J_n=\frac{1}{(n-1)!} \quad \ldots \quad (18).$$

Für die Wahrscheinlichkeit, daß für eine Aufteilung (11) die Bedingung

$$\alpha\leqq\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n-1}\leqq\beta \qquad (0\leqq\alpha<\beta\leqq 1)$$

erfüllt ist, erhält man nach (13) das Integral

$$\int\limits_\alpha^\beta \varphi_n(\zeta)\, d\zeta,$$

wo die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi_n(\zeta)$ durch

$$\varphi_n(\zeta)=\frac{J_{n-1}(\zeta)}{J_n}=(n-1)\,\zeta^{n-2} \quad \ldots \quad (19)$$

gegeben ist.

Für die Wahrscheinlichkeit, daß für eine Aufteilung (11) die Bedingung

$$0\leqq\xi_\nu\leqq\xi \qquad (\nu=1,2,\ldots n)$$

erfüllt ist, erhält man nach (13) das Integral

$$X_n(\xi)=(n-1)!\int d\xi_1\, d\xi_2 \ldots \xi_{n-1} \quad \ldots \quad (20),$$

das über das Gebiet

$$\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n-1}\leqq 1,$$

$$0\leqq\xi_\nu\leqq\xi\,(\nu=1,2,\ldots n-1), \quad 1-\xi_1-\xi_2-\ldots-\xi_{n-1}\leqq\xi$$

zu erstrecken ist.

Wir werden aber zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit nicht von dieser Integraldarstellung ausgehen, sondern diese als Lösung einer Funktionalgleichung entwickeln.

Bezeichnet ξ_0 die größte der Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für eine Aufteilung (11) die Bedingung

$$\alpha\leqq\xi_0\leqq\beta \qquad (0\leqq\alpha<\beta\leqq 1)$$

erfüllt ist, offenbar durch

$$X_n(\beta)-X_n(\alpha) \quad \ldots \quad (21)$$

gegeben. Nach geläufiger Schlußweise erhält man für den Erwartungswert Θ_n von ξ_0

$$\Theta_n=1-\int\limits_0^1 X_n(\xi)\, d\xi \quad \ldots \quad (22).$$

3. Eine Funktionalgleichung.

Wir werden nun für die Wahrscheinlichkeiten $X_n(\xi)$ eine Funktionalrekursion herleiten. Es sei $n\geqq 2$. Wir betrachten zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für eine Aufteilung (11) die Nebenbedingungen

a) $\zeta \leq \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n-1} \leq \zeta + d\zeta$,

b) $0 \leq \xi_\nu \leq \xi \quad (\nu = 1, 2, \ldots n-1)$,

c) $0 \leq \xi_n \leq \xi$

erfüllt sind. Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Bedingungen sind:

a) $(n-1)\,\zeta^{n-2}\,d\zeta$ (nach (19)),

b) $X_{n-1}\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)$ (man dividiere in a) durch ζ),

c) $\omega(\zeta) = \begin{cases} 1\,(\zeta \geq 1-\xi) \\ 0\,(\zeta < 1-\xi). \end{cases}$

Nach dem Produktsatz ist die oben bezeichnete Wahrscheinlichkeit

$$(n-1)\,\zeta^{n-2}\,X_{n-1}\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)\omega(\zeta)\,d\zeta.$$

Wenn man nun die Bedingung a) fallen läßt, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $X_n(\xi)$ nach dem Summensatz

$$X_n(\xi) = (n-1)\int_0^1 X_{n-1}\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)\zeta^{n-2}\,\omega(\zeta)\,d\zeta,$$

oder mit anderer Berücksichtigung der Hilfsfunktion $\omega(\zeta)$

$$X_n(\xi) = (n-1)\int_{1-\xi}^1 X_{n-1}\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)\zeta^{n-2}\,d\zeta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23).$$

Die Funktionalgleichung (23) stellt eine Integralrekursion dar, die es ermöglicht, sämtliche Funktionen durch fortgesetzte Integrationen zu gewinnen. Selbstverständlich muß die Ausgangsfunktion gegeben sein. Offenbar ist

$$X_1(\xi) = \begin{cases} 1\,(\quad 1 \leq \xi < \infty) \\ 0\,(-\infty < \xi < 1\,) \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Auf diese Weise erhält man

$$X_2(\xi) = \begin{cases} 1 & (\quad 1 \leq \xi < \infty) \\ 2\xi - 1 & \left(\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1\right) \\ 0 & \left(-\infty < \xi \leq \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

und

$$X_3(\xi) = \begin{cases} 1 & (\quad 1 \leq \xi < \infty) \\ -2 + 6\xi - 3\xi^2 & \left(\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1\right) \\ 1 - 6\xi + 9\xi^2 & \left(\frac{1}{3} \leq \xi \leq \frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(-\infty < \xi \leq \frac{1}{3}\right) \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

usw. Durch eine geeignete Transformation der Funktion $X_n(\xi)$ kann die Funktionalrelation (23), die noch eine ziemlich undurchsichtige Gestalt aufweist, erheblich vereinfacht werden. Wir machen den Ansatz:

$$X_n(\xi) = 2\,(n-1)!\,\xi^{n-1}\,\Phi_n\left(\frac{2}{\xi} - n\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27).$$

Die Relation (23) wird dadurch transformiert in

$$\xi\,\Phi_n\left(\frac{2}{\xi} - n\right) = \int_{1-\xi}^1 \Phi_{n-1}\left(\frac{2\zeta}{\xi} - n + 1\right)d\zeta.$$

Durch die weitere gleichzeitige Transformation von Haupt- und Integrationsvariablen

$$x = \frac{2}{\xi} - n,$$

$$y = \frac{2\zeta}{\xi} - n + 1$$

gewinnt man

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \Phi_{n-1}(y)\, \mathrm{d}\, y \quad \ldots \quad (28).$$

So erhalten wir für die Hilfsfunktionen Φ_n eine bemerkenswert einfache Integralrekursion, die übrigens eine anschauliche Interpretation zuläßt:

Der Funktionswert $\Phi_n(x)$ ist der Integralmittelwert von $\Phi_{n-1}(x)$, der über die symmetrische Nachbarschaft von x, von $x-1$ bis $x+1$ erstreckt wird.

Wie man aus (24) in Verbindung mit (27) folgert, ist die Ausgangsfunktion für die Rekursion (28)

$$\Phi_1(x) = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & (|x| \leqq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{matrix} \right\} \quad \ldots \quad (29).$$

Mit Hilfe der Funktion (29) kann die Funktionalrelation (28) noch auf die folgende Form gebracht werden

$$\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{n-1}(y)\, \Phi_1(x-y)\, \mathrm{d}\, y \quad \ldots \quad (30).$$

4. Eine Darstellung der Lösung.

Wir wollen nun für die sich aus der Integralrekursion ergebenden Funktionen $\Phi_n(x)$ eine explizite Darstellung finden, um so mit (27) zu einer geschlossenen Formel für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $X_n(\xi)$ zu gelangen. Es bezeichne $\varphi_n(\mathrm{t})$ die Fouriersche Transformierte

$$\varphi_n(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x) \cos \mathrm{t}\, x\, \mathrm{d}\, x \quad \ldots \quad (31),$$

welche sicher existiert, da $\Phi_n(x)$ außerhalb des endlichen Intervalles $|x| \leqq n$ verschwindet, wie man zurückgreifend auf die Darstellung (27) leicht verifiziert.

Durch Transformation der Funktionalrelation (30) erhält man nach dem bekannten Faltungssatz[7]) die algebraische Beziehung

$$\varphi_n(\mathrm{t}) = \varphi_{n-1}(\mathrm{t})\, \varphi_1(\mathrm{t}) \quad \ldots \quad (32).$$

Wie man leicht nachrechnet, ist aber

$$\varphi_1(\mathrm{t}) = \frac{\sin \mathrm{t}}{\mathrm{t}} \quad \ldots \quad (33),$$

so daß aus (32) folgt

$$\varphi_n(\mathrm{t}) = \left(\frac{\sin \mathrm{t}}{\mathrm{t}}\right)^n \quad \ldots \quad (34).$$

Nach der Inversionsformel für die Fouriersche Transformation ergibt sich nun

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \mathrm{t}}{\mathrm{t}}\right)^n \cos x\, \mathrm{t}\, \mathrm{d}\, \mathrm{t} \quad \ldots \quad (35).$$

Mit (27) und (35) ist das erste Hauptresultat (3) und (4) erreicht.

Wie man aus der Integraldarstellung (35) abliest, gilt

$$\Phi_n(-x) = \Phi_n(x) \quad \ldots \quad (36).$$

Aus dieser Symmetrie kann noch eine merkwürdige Funktionalgleichung abgeleitet werden.

Wie man auf Grund von (27) leicht verifiziert, ergibt sich als Folge von (36)

$$X_n(\xi) = (n\,\xi - 1)^{n-1}\, X_n\left(\frac{\xi}{n\,\xi - 1}\right) \quad \left(\frac{1}{n} < \xi\right) \quad \ldots \quad (37).$$

[7]) Vgl. etwa G. Doetsch: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937, S. 162.

Da für das Intervall

$$\frac{1}{n} < \xi \leqq \frac{1}{n-1}$$

das Argument

$$\frac{\xi}{n\xi - 1} \geqq 1$$

ausfällt, liefert die Funktionalgleichung für dieses Intervall die Funktionswerte, nämlich

$$X_n(\xi) = (n\xi - 1)^{n-1} \quad \left(\frac{1}{n} < \xi \leqq \frac{1}{n-1}\right) \quad \ldots \quad (38).$$

5. Eine Rekursion.

Wir wollen nun für die durch (22) definierten Erwartungswerte Θ_n eine Rekursion herleiten, aus welcher sich dann der explizite Ausdruck (5), also das zweite Hauptresultat mühelos ergibt.

Im folgenden sei stets $n \geqq 3$. Wir setzen

$$\Theta_n = 1 - (n-1)!\, \Delta_n \quad \ldots \quad (39),$$

wo also nach (22)

$$\Delta_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 X_n(\xi)\, d\xi \quad \ldots \quad (40),$$

oder unter Verwendung der Darstellung (27)

$$\Delta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \xi^{n-1} \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \cos\left(\frac{2}{\xi} - n\right) t\, dt \right\} d\xi \quad \ldots \quad (41)$$

ist. Durch die Transformation $t = \xi a$ ergibt sich

$$\Delta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_0^1 (\sin \xi a)^n \cos(2 - n\xi)\, a\, d\xi \right\} \frac{da}{a^n} \quad \ldots \quad (42),$$

oder wenn wir die Hilfsfunktionen

$$\Psi_n(a) = \int_0^a (\sin x)^n \cos(2a - nx)\, dx \quad \ldots \quad (43),$$

$$\Psi_n^*(a) = \int_0^a (\sin x)^n \sin(2a - nx)\, dx \quad \ldots \quad (44)$$

einführen, die Darstellung

$$\Delta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Psi_n(a) \frac{da}{a^{n+1}} \quad \ldots \quad (45).$$

Naheliegende Abschätzungen des Integrals (43) sind

$$|\Psi_n(a)| \leqq a, \qquad |\Psi_n(a)| \leqq \frac{a^{n+1}}{n+1} \quad \ldots \quad (46),$$

wo die erste für große a, die zweite dagegen für kleine a in Anspruch genommen werden kann.

Durch zweimalige partielle Integration von (45) gewinnt man unter Beachtung von (46)

$$\Delta_n = \frac{1}{n(n-1)} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Psi_n''(a) \frac{da}{a^{n-1}} \quad \ldots \quad (47).$$

Durch Anwendung der trigonometrischen Additionstheoreme ergeben sich für die Hilfsfunktionen (43) und (44) die Rekursionen

$$\Psi_n(a) = \frac{1}{2n} (\sin a)^n \sin(n-2)\, a + \frac{1}{2} \Psi_{n-1}^*(a) \quad \ldots \quad (48)$$

und

$$\Psi_n^*(a) = \frac{1}{2n} (\sin a)^n \cos(n-2)\, a - \frac{1}{2} \Psi_{n-1}(a) \quad \ldots \quad (49).$$

Durch Verbindung der erhaltenen Relationen (48) und (49) gewinnt man jetzt

$$\Psi_n(a) = \left\{\frac{\sin a \sin(n-2)\,a}{2\,n} + \frac{\cos(n-3)\,a}{4\,(n-1)}\right\}(\sin a)^{n-1} - \frac{1}{4}\,\Psi_{n-2}(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50).$$

Andererseits ergibt zweimalige Ableitung von (43)

$$\Psi_n''(a) = \{n \cos(n-1)\,a + 4 \sin a \sin(n-2)\,a\}\,(\sin a)^{n-1} - 4\,\Psi_n(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51).$$

Setzen wir den in (50) geschriebenen Ausdruck in (51) ein, so erhalten wir

$$\Psi_n''(a) = \vartheta_n(a) + \Psi_{n-2}(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52),$$

wo zur Abkürzung

$$\vartheta_n(a) = \left\{n \cos(n-1)\,a - \frac{1}{n-1}\cos(n-3)\,a + \left(4 - \frac{2}{n}\right)\sin a \sin(n-2)\,a\right\}(\sin a)^{n-1} \quad . \quad (53),$$

oder nach einfacher trigonometrischer Umformung

$$\left\{\left(n - 2 + \frac{1}{n}\right)\cos(n-1)\,a + \left(2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)\cos(n-3)\,a\right\}(\sin a)^{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

gesetzt wurde. Verwenden wir den für die zweite Ableitung gewonnenen Ausdruck (52) in der Formel (47), und drücken die vom Teil (54) herrührenden bestimmten Integrale durch die Hilfsfunktionen (4) aus, so resultiert

$$\Delta_n = \frac{2}{n\,(n-1)}\left\{\left(n - 2 + \frac{1}{n}\right)\Phi_{n-1}(n-1) + \left(2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)\Phi_{n-1}(n-3)\right\} + \frac{\Delta_{n-2}}{n\,(n-1)} \quad . \quad . \quad (55).$$

Nun ist nach der Formel (10) von Laplace

$$\Phi_{n-1}(n-1) = 0, \qquad \Phi_{n-1}(n-3) = \frac{1}{2\,(n-2)\,!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56),$$

so daß wir die Rekursion

$$\Delta_n = \frac{1}{n\,!}\left(2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n\,(n-1)}\,\Delta_{n-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

erreichen. Nach (39) ist aber

$$\Delta_n = \frac{1 - \Theta_n}{(n-1)\,!}$$

zu setzen. So ergibt sich aus (57) die gesuchte Rekursion

$$\Theta_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\Theta_{n-2} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58).$$

Da die Rekursion um zwei Stellen zurückgreift, müssen zwei Ausgangswerte gegeben sein. Im Hinblick auf die Voraussetzung $n \geqq 3$ sind das offenbar

$$\Theta_1 = 1 \quad \text{und} \quad \Theta_2 = \frac{3}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59),$$

die sich aus (22) unter Verwendung von (24) und (25) berechnen lassen.

Es gelingt nun, die sich auf Grund der Rekursion (58) ergebende Folge in expliziter Gestalt anzugeben. Wie man mühelos direkt verifizieren kann, ist nämlich

$$\Theta_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60).$$

Damit haben wir das zweite Hauptresultat (5) gewonnen.

6. Tabelle der Erwartungswerte.

Wir geben nun eine Zusammenstellung der ersten 20 Erwartungswerte Θ_n:

n	Θ_n	n	Θ_n	n	Θ_n	n	Θ_n
1	1,000 000	6	0,408 333	11	0,274 534	16	0,211 296
2	0,750 000	7	0,370 408	12	0,258 601	17	0,202 327
3	0,611 111	8	0,339 732	13	0,244 626	18	0,194 173
4	0,520 833	9	0,314 330	14	0,232 254	19	0,186 723
5	0,456 667	10	0,292 897	15	0,221 215	20	0,179 887

KLEINE MITTEILUNGEN

Ergänzungen zu: Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen.

Herr Görtler veröffentlicht nachfolgend eine Reihe von Differentialgleichungen mit ihren Lösungen als Ergänzung zu dem kürzlich erschienenen Buch von E. Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Leipzig 1942. Da die im dritten Teil dieses Buches gegebene Sammlung von Lösungen von Differentialgleichungen ihre Aufgabe um so besser erfüllen wird, je vollständiger sie ist, hat Herr Görtler angeregt, in der Zamm eine Rubrik für die Veröffentlichung solcher Ergänzungen zu dem Buch einzurichten. Wir halten diese Anregung für sehr glücklich und bitten daher alle Leser der Zeitschrift, durch Einsendung etwaiger von ihnen gelöster und noch nicht veröffentlichter Differentialgleichungen zur Vervollständigung der Sammlung beizutragen. Jeder einzelne einmal bearbeitete Fall kann anderen von Nutzen sein und Arbeit ersparen.

Einsendungen bitten wir an den Herausgeber der Zamm zu richten. Die Veröffentlichungen werden unter dem obigen Sammeltitel erfolgen.

Tübingen/Dresden. Kamke. Willers.

Ergänzungen. In der kurzen Zeit seit dem ersten Erscheinen der Kamkeschen Sammlung von Differentialgleichungen nebst Lösungen (Vorausdruck 1940 im Auftrage der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters) hat sich der überaus große Nutzen einer solchen Sammlung für die Praxis erwiesen. Der Aufforderung, diese Sammlung möglichst bald um alle erreichbaren, noch nicht aufgenommenen Gleichungen mit Lösungen (vor allem aber auch um jene, die, der Allgemeinheit nichts nutzend, in den Schreibtischen unveröffentlicht schlummern) zu ergänzen, komme ich zunächst, um einen Anfang zu machen, mit einigen anspruchlosen Vertretern aus der Klasse der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach. Ich habe die teilweise zufällig, teilweise im Rahmen bestimmter Fragestellungen der angewandten Mathematik gefundenen Ergebnisse nur so weit verallgemeinert, als mir dies aus Zeitgründen gegenwärtig möglich war. Immerhin umfassen viele der Beispiele Sonderfälle, welche bereits in der Sammlung aufgenommen sind. Ich habe diese, insofern sie mir aufgefallen sind, jeweils unter Anführung der betreffenden Ziffer des Kamkeschen Buches[1]) angegeben. Die Anordnung der Gleichungstypen entspricht der Kamkeschen Systematik.

$$y'' = \left\{\frac{a^2+b^2}{2} + c^2 + (2ac+b)\cos x + (2bc-a)\sin x + \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2x + ab\sin 2x\right\} y \qquad (1);$$

$$y = \exp\{cx + a\sin x - b\cos x\}\,[C_1 + C_2 \textstyle\int \exp\{-2(cx + a\sin x - b\cos x)\}\,\mathrm{d}x]$$

(Hillsche Differentialgleichung).

$$y'' = \{a^2 + b(1+2a)e^x + b^2 e^{2x}\}\,y \quad \ldots \quad (2);$$

$$y = \exp\{ax + be^x\}\,[C_1 + C_2 \textstyle\int \exp\{-2(ax + be^x)\}\,\mathrm{d}x].$$

[1]) E. Kamke: Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Leipzig 1942, Teil C.

$$y'' + ay' + \{b + ce^x\}\,y = 0 \quad \ldots \quad (3);$$

$$y = \exp\left\{-\frac{a}{2}x\right\} Z_\nu(2\sqrt{c}\,e^{x/2}) \text{ mit } \nu = \sqrt{a^2 - 4b},$$

wo Z_ν die allgemeine Zylinderfunktion der Ordnung ν bezeichnet.

$$y'' + \{a + be^x\}\,y' + \{a_1 + b_1 e^x\}\,y = 0 \quad \ldots \quad (4).$$

1. Ist $a_1 = \alpha(a-\alpha)$, $b_1 = b(1+a-\alpha)$, so ist

$$y = \exp\{-\alpha x - be^x\}\,[C_1 + C_2 \textstyle\int \exp\{(2\alpha - a)x + be^x\}\,\mathrm{d}x].$$

2. Ist $a_1 = \alpha(a-\alpha)$, $b_1 = \alpha b$, so ist

$$y = e^{-\alpha x}[C_1 + C_2 \textstyle\int \exp\{(2\alpha - a)x - be^x\}\,\mathrm{d}x].$$

$$y'' + \{a + be^x\}\,y' + \{a_1 + b_1 e^x + c_1 e^{2x}\}\,y = 0 \quad (4\text{a});$$

Ist $a_1 = \alpha(a-\alpha)$, $b_1 = \alpha b + 2\alpha\beta - a\beta - \beta$, $c_1 = -\beta(b+\beta)$, so ist

$$y = \exp\{-\alpha x + \beta e^x\}\,[C_1 + C_2 \textstyle\int \exp\{(2\alpha - a)x - (2\beta + b)e^x\}\,\mathrm{d}x].$$

((4) ist hierin enthalten. Sonderfall: Kamke 2.34.)

$$y'' + f(x)\,y' - \{a(a+1)f^2(x) + af'(x)\}\,y = 0 \qquad (5);$$

$$y = \exp\{a \textstyle\int f\,\mathrm{d}x\}\,[C_1 + C_2 \int \exp\{-(2a+1)\int f\,\mathrm{d}x\}\,\mathrm{d}x].$$

$$y'' + \{f(x) + g(x)\}\,y' + \{f'(x) + f(x)g(x)\}\,y = 0 \quad (6);$$

$$y = \exp\{-\textstyle\int f\,\mathrm{d}x\}\,[C_1 + C_2 \int \exp\{\int (f - g)\,\mathrm{d}x\}\,\mathrm{d}x].$$

(Sonderfall: Kamke 2.29 für $f(x) \equiv -g(x)$.)

$$x y'' + \{a + bx + cx^2\}\,y' + \{a_1 + b_1 x + c_1 x^2\}\,y = 0 \quad \ldots \quad (7).$$

1. Ist $a_1 = b(a-1) + \beta(a-2)$, $b_1 = 2c - b\beta - \beta^2$, $c_1 = c(b+\beta)$, so ist

$$y = x^{1-a}\exp\left\{\beta x - \frac{cx^2}{2}\right\}\left[C_1 + C_2\int x^{a-2}\exp\left\{-(b+2\beta)x + \frac{cx^2}{2}\right\}\mathrm{d}x\right].$$

(Sonderfall: Kamke 2.136.)

2. Ist $a_1 = b(a-1) + \beta(a-2)$, $b_1 = ac - b\beta - c - \beta^2$, $c_1 = -c\beta$, so ist

$$y = x^{1-a} e^{\beta x}\left[C_1 + C_2\int x^{a-2}\exp\left\{-(b+2\beta)x - \frac{cx^2}{2}\right\}\mathrm{d}x\right].$$

(Sonderfall: Kamke 2.121.)

3. Ist $a_1 = -a\beta$, $b_1 = -\beta(b+\beta)$, $c_1 = -c\beta$, so ist

$$y = e^{\beta x}\left[C_1 + C_2\int x^{-a}\exp\left\{-(b+2\beta)x + \frac{cx^2}{2}\right\}\mathrm{d}x\right].$$

(Sonderfall: Kamke 2.141.)

4. Ist $a_1 = -a\beta$, $b_1 = c(1+a) - \beta(\beta+b)$, $c_1 = c(b+\beta)$, so ist

$$y = \exp\left\{\beta x - \frac{cx^2}{2}\right\}\left[C_1 + C_2\int x^{-a}\exp\left\{-(b+2\beta)x - \frac{cx^2}{2}\right\}\mathrm{d}x\right].$$

(Sonderfall: Kamke 2.122.)

$$\left.\begin{aligned} &\underline{x\,y'' + 2\,(1 + b\,x)\,y'}\\ &\quad \underline{+\left\{2\,b + \left(b^2 - \frac{1}{4}\right)x - c^2\,x\,e^{2x}\right\}y = 0} \end{aligned}\right\} \quad (8);$$

$$y = x^{-1}\exp\left\{-\left(b + \frac{1}{2}\right)x + c\,e^x\right\}$$
$$[C_1 + C_2 \int \exp\{x - 2\,c\,e^x\}\,\mathrm{d}x].$$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{x\,y'' + 2\,(1 + b\,x)\,y'}\\ &\quad \underline{+ \{2\,b + b^2 x + c\,x\,e^x\,(1 - c\,e^x)\}\,y = 0} \end{aligned}\right\} \quad (9);$$

$$y = x^{-1}\exp\{-b\,x - c\,e^x\}$$
$$[C_1 + C_2 \int \exp\{2\,c\,e^x\}\,\mathrm{d}x].$$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{x^2\,y'' + x\,(a + b\,x)\,y'}\\ &\quad \underline{+ \{\alpha\,(a - \alpha - 1) + (\alpha\,(b - \beta) + \beta\,(a - \alpha))\,x}\\ &\quad \underline{+ \beta\,(b - \beta)\,x^2\}\,y = 0} \end{aligned}\right\} (10);$$

$$y = x^{-\alpha}\,e^{-\beta x}\,[C_1 + C_2 \int x^{2\alpha - a}\,e^{(2\beta - b)x}\,\mathrm{d}x].$$

(Sonderfälle: Kamke 2.176; 2.179; 2.187; 2.196; 2.198; 2.199; 2.202; 2.277; 2.281).

$$\left.\begin{aligned} &\underline{x^2\,y'' + x\,\{a + b\,x + c\,x^2\}\,y'}\\ &\quad \underline{+ \{a_1 + b_1\,x + c_1\,x^2 + d_1\,x^3\}\,y = 0} \end{aligned}\right\} \quad (11).$$

1. Für $a_1 = \alpha\,(a - \alpha - 1)$, $b_1 = \alpha\,(b - \beta) + \beta\,(a - \alpha)$, $c_1 = \alpha\,c + \beta\,b - \beta^2$, $d_1 = \beta\,c$ lautet die Lösung:
$$y = x^{-\alpha}\,e^{-\beta x}$$
$$\left[C_1 + C_2 \int x^{2\alpha - a}\exp\left\{(2\,\beta - b)\,x - \frac{c\,x^2}{2}\right\}\mathrm{d}x\right].$$

2. Für $a_1 = \alpha\,(a - \alpha - 1)$, $b_1 = \alpha\,(b - \beta) + \beta\,(a - \alpha)$, $c_1 = c\,(a - \alpha + 1) + \beta\,(b - \beta)$, $d_1 = c\,(b - \beta)$, lautet die Lösung:
$$y = x^{-\alpha}\exp\left\{-\beta\,x - \frac{c\,x^2}{2}\right\}$$
$$\left[C_1 + C_2 \int x^{2\alpha - a}\exp\left\{(2\,\beta - b)\,x + \frac{c\,x^2}{2}\right\}\mathrm{d}x\right].$$

(Sonderfälle: Kamke 2.209, ferner natürlich (7)).

$$\left.\begin{aligned} &\underline{x^2\,y'' + x\,f(x)\,y' + \{a\,(1 - a)}\\ &\quad \underline{+ (a - 1)\,f(x) + x\,f'(x)\}\,y = 0} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12);$$

$$y = x^a \exp\{-\int x^{-1} f\,\mathrm{d}x\}$$
$$[C_1 + C_2 \int x^{-2a}\exp\{\int x^{-1} f\,\mathrm{d}x\}\,\mathrm{d}x].$$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{x^2\,y'' + x\,(f(x) + 2\,a)\,y'}\\ &\quad \underline{+ \{a\,(a - 1) - b^2 x^2 + (a + b\,x)\,f(x)\}\,y = 0} \end{aligned}\right\} (13);$$

$$y = x^{-a}\,e^{-bx}\,[C_1 + C_2 \int \exp\{2\,b\,x - \int x^{-1} f\,\mathrm{d}x\}\,\mathrm{d}x].$$

$$\underline{f(x)\,y'' + \{1 + f'(x) + f(x)\,g(x)\}\,y' + g(x)\,y = 0} \quad (14);$$

$$y = \exp\{-\int f^{-1}\,\mathrm{d}x\}$$
$$[C_1 + C_2 \int f^{-1}\exp\{\int (f^{-1} - g)\,\mathrm{d}x\}\,\mathrm{d}x].$$

Göttingen. H. Görtler. 383

Berichtigungen zu: Kamke, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Seite 160, Zeile 9, statt $f_2(x)$ lies: $f_2(y)$. Seite 431, 2: 126a, statt des zweiten y'' lies: y'.

Über die Lösung von Gleichungssystemen durch Iteration. Im Folgenden soll eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit eines Gleichungssystem mit mehreren Unbekannten durch (spezielle) Iteration mitgeteilt werden. Der Einfachheit halber wird sie nur für zwei Unbekannte formuliert werden, woraus ihr Wortlaut für mehr Unbekannte sofort ersichtlich ist. Das System habe die Form

$$x = \varphi\,(x, y), \qquad y = \psi\,(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die durch hinreichend gute Ausgangsnäherungswerte $(x^{(0)}, y^{(0)})$ für eine Lösung (a, b) und durch die Rechenvorschrift

$$x^{(\nu)} = \varphi\,(x^{(\nu - 1)}, y^{(\nu - 1)}), \quad y^{(\nu)} = \psi\,(x^{(\nu - 1)}, y^{(\nu - 1)}) \quad (2)$$

bestimmten Wertefolgen $(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})$ konvergieren bekanntlich gegen die Lösung (a, b), falls

$$M_x + N_x \leqq \vartheta < 1, \quad M_y + N_y \leqq \vartheta < 1 \quad . \quad (3).$$

Dabei sind M_x, M_y, N_x, N_y obere Schranken von $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|$ bzw. $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|$ in einem konvexen Bereich der x-y-Ebene, der sämtliche Näherungen $(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})$ und die Lösung (a, b) enthält[1]).

Diese Bedingung erweist sich aber vielfach als sehr ungünstig. Bei Gelegenheit einer Fehlerabschätzung bei der numerischen Integration von Differentialgleichungen (Z. angew. Math. Mech. Bd. 12 [1932], S. 44—59) war vom Verf. bereits eine günstigere angegeben worden (a. a. O., S. 56—57), die aber wegen der speziellen, auf das dort behandelte Problem zugeschnittenen Formulierung offenbar wenig bekannt geworden ist.

Aus (2) folgt nach dem Mittelwertsatz

$$\left.\begin{aligned} &x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\\ &\quad = (x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)})\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (y^{(\nu)} - y^{(\nu-1)})\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ &y^{(\nu+1)} - y^{(\nu)}\\ &\quad = (x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)})\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} + (y^{(\nu)} - y^{(\nu-1)})\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (4),$$

wobei sämtliche partiellen Ableitungen an einer Zwischenstelle der geradlinigen Verbindungsstrecke der Punkte $(x^{(\nu-1)}, y^{(\nu-1)})$ und $(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})$ zu nehmen sind. Daraus folgt weiter

$$\left.\begin{aligned} &|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}|\\ &\quad \leqq M_x\cdot|x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}| + M_y\cdot|y^{(\nu)} - y^{(\nu-1)}|\\ &|y^{(\nu+1)} - y^{(\nu)}|\\ &\quad \leqq N_x\cdot|x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}| + N_y\cdot|y^{(\nu)} - y^{(\nu-1)}| \end{aligned}\right\} \quad (5),$$

wobei M_x, M_y, N_x, N_y die obigen Bedeutungen haben. Besitzt nun die Matrix nichtnegativer Elemente

$$\begin{pmatrix} M_x & M_y \\ N_x & N_y \end{pmatrix}$$

nur charakteristische Zahlen, das heißt Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} M_x - \mu & M_y \\ N_x & N_y - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

die dem Betrage nach kleiner sind als 1, dann konvergieren die Reihen

$$\sum |x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}| \quad \text{und} \quad \sum |y^{(\nu+1)} - y^{(\nu)}|$$

---

[1]) Vgl. Fr. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis, Berlin und Leipzig 1928, S. 167. — H. v. Sanden: Praktische Analysis, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1923, S. 160 bis 162.

und erst recht die Reihen

$$\left.\begin{aligned} x^{(0)} + (x^{(1)} - x^{(0)}) + (x^{(2)} - x^{(1)}) + \cdots &= \lim_{\nu \to \infty} x^{(\nu)} \\ y^{(0)} + (y^{(1)} - y^{(0)}) + (y^{(2)} - y^{(1)}) + \cdots &= \lim_{\nu \to \infty} y^{(\nu)} \end{aligned}\right\} \quad (7),$$

und zwar gegen die Lösung (a, b).

Zum Beweis wird der folgende Hilfssatz verwendet, der bereits a. a. O. S. 52—53 formuliert wurde: Bestehen zwischen den Gliedern von k unendlichen Reihen

$$u_{\varkappa 0} + u_{\varkappa 1} + u_{\varkappa 2} + \cdots + u_{\varkappa \nu} + \cdots \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots, k)$$

mit positiven Gliedern für alle $\nu > N$ die k linearen Ungleichungen

$$u_{\varkappa, \nu+1} \leqq c_{\varkappa 1} u_{1\nu} + c_{\varkappa 2} u_{2\nu} + \cdots + c_{\varkappa k} u_{k\nu} \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots, k)$$

und besitzt deren Matrix $\mathfrak{C} = \{c_{i\varkappa}\}$ nur nichtnegative Elemente sowie charakteristische Zahlen, die dem Betrage nach kleiner als 1 sind, dann konvergieren die k Reihen sämtlich.

Für die wichtigen Fälle von zwei oder drei Unbekannten ist die Probe, ob die Bedingung erfüllt ist, ohne große Mühe durchzuführen, zumal die charakteristischen Zahlen nur sehr roh bestimmt zu werden brauchen. Bei ihrer Berechnung macht man bisweilen vorteilhaft davon Gebrauch, daß nach einem Satze von G. Frobenius die charakteristische Gleichung einer Matrix mit positiven Elementen eine Wurzel hat, die reell, positiv, einfach und absolut größer ist als jede andere Wurzel (die sogenannte Maximalwurzel). Kommen verschwindende Elemente in der Matrix vor, so bedarf dieser Satz einer Abänderung; indessen kann ja immer erreicht werden, daß sämtliche obere Schranken positiv sind.

Es mag noch erwähnt werden, daß auch

$$M_x + M_y \leqq \vartheta' < 1, \quad N_x + N_y \leqq \vartheta' < 1 \quad . \quad (8)$$

eine hinreichende Bedingung ist. Zum Beweis schließt man von (5) aus weiter, daß

$$\left.\begin{aligned} |x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}| &\leqq (M_x + M_y) \\ &\quad \cdot \max\left(|x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}|, |y^{(\nu)} - y^{(\nu-1)}|\right) \\ |y^{(\nu+1)} - y^{(\nu)}| &\leqq (N_x + N_y) \\ &\quad \cdot \max\left(|x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}|, |y^{(\nu)} - y^{(\nu-1)}|\right) \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

gilt und daher auch

$$\left.\begin{aligned} &\max\left(|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}|, |y^{(\nu+1)} - y^{(\nu)}|\right) \\ &\leqq \vartheta' \cdot \max\left(|x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)}|, |y^{(\nu)} - y^{(\nu-1)}|\right) \end{aligned}\right\} (10).$$

Daraus folgt dann die absolute Konvergenz der Reihen (7).

Schließlich ist es auch für die Konvergenz der Iterationen hinreichend, wenn die Quadratsumme aller Elemente in der Matrix der Schranken für die Absolutbeträge der partiellen ersten Ableitungen kleiner als 1 ist, wenn also bei zwei Unbekannten

$$M_x^2 + M_y^2 + N_x^2 + N_y^2 \leqq \vartheta'' < 1 \quad . \quad . \quad (11)$$

ist[2]). Ist nämlich die Summe der Quadrate aller Elemente einer (reellen) Matrix kleiner als 1, so folgt nach zweimaliger Anwendung der Schwarzschen Ungleichung, daß die Folge der Potenzen der Matrix gegen die Nullmatrix konvergiert. Dann und nur dann sind aber die charakteristischen Zahlen sämtlich dem Betrage nach kleiner als 1, und man kann wie oben weiterschließen.

Berlin. Günther Schulz. 384

[2]) Für Systeme linearer Gleichungen findet sich eine entsprechende Bedingung bei R. v. Mises und H. Pollaczek-Geiringer: Z. angew. Math. Mech., Bd. 9 (1929), S. 58 bis 77 u. S. 152 bis 164, und zwar auf S. 67.

Zur Interpolation bei ungleichen Tafelabständen. Die Aufgabe, einen Näherungswert der Funktion $f(x)$ an einer Stelle x zu berechnen, falls für die Argumente $x_0, x_1, \ldots, x_n$ die zugehörigen Funktionswerte $y_0, y_1, \ldots, y_n$ gegeben sind, wird am einfachsten mit der Lagrangeschen oder der Newtonschen Interpolationsformel gelöst. Vielfach zeigt sich nach Ausführung der Interpolation, daß man noch weitere Funktionswerte in Rechnung zu ziehen hat. Während in einem solchen Falle bei Verwendung der Lagrangeschen Interpolationsformel die ganze Rechnung von vorne durchzuführen ist, kann man bei der Newtonschen Interpolationsformel die bisherige Rechnung benutzen, weshalb sie für die Praxis die größere Bedeutung hat.

Neben dieser Forderung, bei Erweiterung der Interpolation die bisherige Rechenarbeit verwenden zu können, die man an eine praktische Interpolationsformel stellen muß, ist es außerdem erwünscht, die Änderung des bisherigen Näherungswertes, die durch Hinzunahme eines weiteren Funktionswertes erzielt wird, überschlagsmäßig rasch abschätzen zu können und außerdem diese Änderung möglichst schnell zu erhalten, vor allem falls sehr viele Interpolationen durchzuführen sind.

Bei Verwendung der allgemeinen Newtonschen Interpolationsformel

$$\left.\begin{aligned} y = y_0 &+ [x_0 x_1](x - x_0) \\ &+ [x_0 x_1 x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &+ [x_0 x_1 \cdots x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots \\ &\qquad (x - x_{n-1}) \end{aligned}\right\} . \quad (1)$$

pflegt man die darin auftretenden „Steigungen" $[x_0 x_1 \ldots x_\nu]$, die symmetrische Funktionen von $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$ sind z. B. aus

$$\left.\begin{aligned} [x_\nu x_{\nu+1}] &= \frac{y_\nu - y_{\nu+1}}{x_\nu - x_{\nu+1}} \\ [x_\nu x_{\nu+1} \cdots x_{\nu+\mu}] &= \\ \frac{[x_\nu x_{\nu+1} \cdots x_{\nu+\mu-1}] - [x_{\nu+1} x_{\nu+2} \cdots x_{\nu+\mu}]}{x_\nu - x_{\nu+\mu}} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

zu berechnen[1]).

Diese Interpolationsformel hat, auch wenn der Näherungswert an einer x_0 benachbarten Stelle berechnet werden soll und die Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ in zweckmäßiger Weise auf beiden Seiten von x liegen, vor allem bei großen Abständen der Argumente x_ν, den Nachteil, daß die Steigungen $[x_0 x_1 \ldots x_\nu]$ im allgemeinen mit wachsendem ν sehr klein, dagegen die Produkte $(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{\nu-1})$ entsprechend groß werden, daß man ferner schlecht übersehen kann, in welcher Weise die Hinzunahme eines neuen Funktionswertes das bisherige Ergebnis der Interpolation beeinflußt.

Sind die Abstände der x_ν alle gleich, $x_\nu - x_{\nu+1} = h$, und setzt man $\frac{x - x_0}{h} = t$, so erhält man (1) unter Benutzung absteigender Differenzen in der für die praktische Rechnung bequemeren Gestalt

$$\left.\begin{aligned} y = y_0 &+ \Delta_0^{(1)} t + \Delta_0^{(2)} \frac{t(t+1)}{1 \cdot 2} \\ &+ \Delta_0^{(3)} \frac{t(t+1)(t+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots \\ &+ \Delta_0^{(n)} \frac{t(t+1)(t+2) \cdots (t+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \end{aligned}\right\} \quad (3),$$

wobei $\Delta_0^{(\nu)}$ das 1. Glied der νten Differenzenfolge von $y_0 y_1 \ldots y_n$ bedeutet, $\Delta_0^{(\nu)} = \Delta_0^{(\nu-1)} - \Delta_1^{(\nu-1)}$.

[1]) Vgl. z. B. F. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis, Berlin und Leipzig 1928, S. 58 ff.

Liegt x in der Nähe von x_0, $x_0 - |h| < x < x_0 + |h|$, so sind die Koeffizienten der Differenzen in (3) absolut genommen alle < 1 und der Betrag des bei Erhöhung des Grades der Interpolation hinzutretenden Gliedes ist absolut genommen jedenfalls kleiner als der Absolutbetrag der zugehörigen Differenz.

Es sei hier für den Fall ungleicher Abstände der Argumente eine andere Form der Interpolationsformel angegeben, die sich an die Form für gleiche Abstände anschließt. Sie eignet sich vor allem, falls in ein und derselben Tafel sehr viele Interpolationen durchgeführt werden müssen, z. B. bei Einargumentinterpolationen in einer Tafel von mehreren Veränderlichen. Bei Verwendung entsprechender Hilfstafeln erlaubt sie den durch Hinzunahme eines weiteren Funktionswertes auftretenden Beitrag schnell abzuschätzen und zu berechnen.

Wir bilden

$$P_\nu^{(\mu)} = P_\nu^{(\mu-1)} \frac{x_{\nu-1} - x_{\nu+\mu-1}}{x_\nu - x_{\nu+\mu}}, \quad P_\nu^{(0)} = 1$$

und damit die verallgemeinerten „Differenzen“

$$D_\nu^{(\mu+1)} = D_\nu^{(\mu)} - P_{\nu+1}^{(\mu)} D_{\nu+1}^{(\mu)} \quad . \; . \; . \quad (4),$$

$$D_\nu^{(1)} = \Delta_\nu^{(1)} = y_\nu - y_{\nu+1}.$$

$$\mu = 1, 2, 3, \cdots; \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots,$$

also das folgende Schema

$$\begin{array}{cccc|c|c|cccc}
 & & & & x_0 & y_0 & & & & \\
 & & & & & & D_0^{(1)} & & & \\
 & & & P_1^{(1)} & x_1 & y_1 & & D_0^{(2)} & & \\
 & & P_1^{(2)} & & & & D_1^{(1)} & & D_0^{(3)} & \\
 & P_1^{(3)} & & P_2^{(1)} & x_2 & y_2 & & D_1^{(2)} & & D_0^{(4)} \\
P_1^{(4)} & & P_2^{(2)} & & & & D_2^{(1)} & & D_1^{(3)} & \\
\vdots & P_2^{(3)} & & P_3^{(1)} & x_3 & y_3 & & D_2^{(2)} & & D_1^{(4)} \cdots \\
 & \vdots & P_3^{(2)} & & & & D_3^{(1)} & & D_2^{(3)} & \vdots \\
 & & \vdots & P_4^{(1)} & x_4 & y_4 & & D_3^{(2)} & \vdots & \\
 & & & & & & D_4^{(1)} & \vdots & & \\
 & & & P_5^{(1)} & x_5 & y_5 & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & &
\end{array} \quad (5)$$

und erhalten aus (1)

$$\left.\begin{aligned}
y = y_0 &+ D_0^{(1)} \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} \\
&+ D_0^{(2)} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\
&+ D_0^{(3)} \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \\
&+ \cdots \\
&+ D_0^{(n)} \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)}
\end{aligned}\right\} . \quad (6).$$

Es gilt nämlich

$$\left.\begin{aligned}
&[x_\nu \, x_{\nu+1} \, x_{\nu+2} \cdots x_{\nu+n}] \\
&= \frac{D_\nu^{(n)}}{(x_\nu - x_{\nu+1})(x_\nu - x_{\nu+2}) \cdots (x_\nu - x_{\nu+n})}
\end{aligned}\right\} . \quad (7).$$

Für $n = 1$ ist das offensichtlich:

$$[x_\nu \, x_{\nu+1}] = \frac{y_\nu - y_{\nu+1}}{x_\nu - x_{\nu+1}} = \frac{D_\nu^{(1)}}{x_\nu - x_{\nu+1}};$$

(7) folgt dann durch vollständige Induktion.

Nach (2) ist

$$\begin{aligned}
&[x_\nu \, x_{\nu+1} \, x_{\nu+2} \cdots x_{\nu+n} \, x_{\nu+n+1}] \\
&= \frac{[x_\nu \, x_{\nu+1} \cdots x_{\nu+n}] - [x_{\nu+1} \, x_{\nu+2} \cdots x_{\nu+n+1}]}{x_\nu - x_{\nu+n+1}} \\
&= \left\{ \frac{D_\nu^{(n)}}{(x_\nu - x_{\nu+1})(x_\nu - x_{\nu+2}) \cdots (x_\nu - x_{\nu+n})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{D_{\nu+1}^{(n)}}{(x_{\nu+1} - x_{\nu+2}) \cdots (x_{\nu+1} - x_{\nu+n})(x_{\nu+1} - x_{\nu+n+1})} \right\} \\
&\qquad \cdot \frac{1}{x_\nu - x_{\nu+n+1}} \\
&= \left\{ D_\nu^{(n)} \right. \\
&\quad - \frac{(x_\nu - x_{\nu+1})(x_\nu - x_{\nu+2}) \cdots (x_\nu - x_{\nu+n})}{(x_{\nu+1} - x_{\nu+2})(x_{\nu+1} - x_{\nu+3}) \cdots (x_{\nu+1} - x_{\nu+n+1})} \\
&\qquad \left. \cdot D_{\nu+1}^{(n)} \right\} \\
&\quad \cdot \frac{1}{(x_\nu - x_{\nu+1})(x_\nu - x_{\nu+2}) \cdots (x_\nu - x_{\nu+n+1})} \\
&= \frac{D_\nu^{(n+1)}}{(x_\nu - x_{\nu+1})(x_\nu - x_{\nu+2}) \cdots (x_\nu - x_{\nu+n})(x_\nu - x_{\nu+n+1})}.
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\frac{x - x_0}{x_0 - x_1} = t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x_0 - x_\nu}{x_0 - x_1} = a_\nu; \\
&a_\nu = \\
&1 + \frac{1}{P_1^{(1)}} + \frac{1}{P_1^{(1)} P_2^{(1)}} + \cdots + \frac{1}{P_1^{(1)} P_2^{(1)} \cdots P_{\nu-1}^{(1)}} \\
&\nu = 2, 3 \cdots
\end{aligned}\right\} \quad (9),$$

wobei

$$a_\nu = a_{\nu-1} + \frac{1}{P_1^{(1)} P_2^{(1)} \cdots P_{\nu-1}^{(1)}}, \quad a_1 = 1,$$

so erhalten wir aus (6)

$$\left.\begin{aligned}
y = y_0 &+ D_0^{(1)} t + D_0^{(2)} \frac{t(t + a_1)}{a_1 \cdot a_2} \\
&+ D_0^{(3)} \frac{t(t + a_1)(t + a_2)}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} + \cdots \\
&\cdots + D_0^{(n)} \frac{t(t + a_1)(t + a_2) \cdots (t + a_{n-1})}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n}
\end{aligned}\right\} \quad (10).$$

In $P_\nu^{(\mu)}$ und in a_ν kommt x bzw. t nicht mehr vor, so daß man sich, falls sehr viele Interpolationen auszuführen sind, eine Hilfstafel für $P_\nu^{(\mu)}$ und die Folge a_ν anfertigt und damit mit Hilfe des Rechenschiebers oder einer geeigneten Rechenmaschine [2]) schnell den neuen Beitrag ausrechnen kann.

Sind alle Tafelabstände gleich, so sind alle $P_\nu^{(\mu)} = 1$, also $D_\nu^{(\mu)} = \Delta_\nu^{(\mu)}$, $a_\nu = \nu$ und (10) geht unmittelbar in (3) über.

Bei Interpolation aus einer Tafel wird man als x_0, x_1, x_2, ... Argumente wählen, die abwechselnd auf beiden Seiten der Interpolationsstelle x gelegen sind. Wir schreiben für solche Fälle das Differenzenschema in folgender Weise:

---

[2]) vgl. F. Emde: Fortlaufende Rechnungen auf der Rechenmaschine, Z. Instrumentenkde. Bd. 56 (1936), S. 185 bis 188.

$$
\begin{array}{ccc|c|c|cccc}
 & & & \vdots & \vdots & & & & \\
 & & \vdots & x_{-3} & y_{-3} & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & & D^{(1)}_{-\frac{5}{2}} & \vdots & & \\
\vdots & & P^{(1)}_{-2} & x_{-2} & y_{-2} & & D^{(2)}_{-2} & \vdots & \\
 & P^{(2)}_{-\frac{3}{2}} & & & & D^{(1)}_{-\frac{3}{2}} & & D^{(3)}_{-\frac{3}{2}} & \\
P^{(3)}_{-1} & & P^{(1)}_{-1} & x_{-1} & y_{-1} & & D^{(2)}_{-1} & & D^{(4)}_{-1} \\
 & P^{(2)}_{-\frac{1}{2}} & & & & D^{(1)}_{-\frac{1}{2}} & & D^{(3)}_{-\frac{1}{2}} & \vdots \\
\cdots P^{(3)}_{0} & & P^{(1)}_{0} & x_{0} & y_{0} & & \underline{D}^{(2)}_{0} & & \underline{D}^{(4)}_{0} \\
 & P^{(2)}_{\frac{1}{2}} & & & & \underline{D}^{(1)}_{\frac{1}{2}} & & \underline{D}^{(3)}_{\frac{1}{2}} & \vdots \\
P^{(3)}_{1} & & P^{(1)}_{1} & x_{1} & y_{1} & & D^{(2)}_{1} & & D^{(4)}_{1} \\
 & P^{(2)}_{\frac{3}{2}} & & & & D^{(1)}_{\frac{3}{2}} & & D^{(3)}_{\frac{3}{2}} & \\
\vdots & & P^{(1)}_{2} & x_{2} & y_{2} & & D^{(2)}_{2} & \vdots & \\
 & \vdots & & & & D^{(1)}_{\frac{5}{2}} & \vdots & & \\
 & & \vdots & x_{3} & y_{3} & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & \vdots & & & & \\
\end{array}
\qquad (11).
$$

wobei also

$$P_\nu^{(2\mu+1)} = \frac{x_{\nu-\mu-1} - x_{\nu+\mu}}{x_{\nu-\mu} - x_{\nu+\mu+1}} \cdot P^{(2\mu)}_{\frac{2\nu-1}{2}} \text{ mit } P^{(0)}_{\frac{2\nu-1}{2}} = 1$$

$$P^{(2\mu)}_{\frac{2\nu+1}{2}} = \frac{x_{\nu-\mu} - x_{\nu+\mu}}{x_{\nu-\mu+1} - x_{\nu+\mu+1}} \cdot P_\nu^{(2\mu-1)}$$

$$D^{(2\mu+1)}_{\frac{2\nu+1}{2}} = D_\nu^{(2\mu)} - P^{(2\mu)}_{\frac{2\nu+1}{2}} \cdot D^{(2\mu)}_{\nu+1};$$

$$D^{(1)}_{\frac{2\nu+1}{2}} = y_\nu - y_{\nu+1}$$

$$D_\nu^{(2\mu)} = D^{(2\mu-1)}_{\frac{2\nu-1}{2}} - P_\nu^{(2\mu-1)} \cdot D^{(2\mu-1)}_{\frac{2\nu+1}{2}}.$$

Liegt dann x zwischen x_0 und x_1, so wird man die Anzahl und Reihenfolge der in der Umgebung des Punktes x gelegenen Tafelwerte x_ν je nach ihrer Dichte und Lage in der einen oder anderen Weise für die Interpolation wählen. Nimmt man z. B. die Folge $x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, \cdots, x_n, x_{-n}$, so erhält man aus (1)

$$\left.\begin{aligned}
y = y_0 &+ [x_0 x_1](x - x_0) \\
&+ [x_0 x_1 x_{-1}](x - x_0)(x - x_1) \\
&+ [x_0 x_1 x_{-1} x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1}) \\
&+ \cdots \\
&+ [x_0 x_1 x_{-1} x_2 x_{-2} \cdots x_n x_{-n}] \\
&\quad (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1}) \cdots (x - x_n)
\end{aligned}\right\} \quad (12).$$

Wegen der Symmetrie der Steigungen ist z. B.

$$[x_0 x_1 x_{-1} x_2] = [x_{-1} x_0 x_1 x_2] = \frac{D^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1)(x_{-1} - x_2)},$$

analog bei den anderen Steigungen.

Demnach erhalten wir bei dieser Einteilung unter Heranziehung der $2n+1$ ten Differenzen als Näherungswert

$$\left.\begin{aligned}
y = {} & \\
y_0 &+ D^{(1)}_{\frac{1}{2}} \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} + D^{(2)}_{0} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1)} \\
&+ D^{(3)}_{\frac{1}{2}} \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})}{(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1)(x_{-1} - x_2)} \\
&+ \cdots \\
&+ D^{(2n)}_{0} \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)}{(x_{-n} - x_{-n+1})(x_{-n} - x_{-n+2})} \\
&\quad \frac{\cdots (x - x_{-n+1})(x - x_n)}{\cdots (x_{-n} - x_{n-1})(x_{-n} - x_n)} \\
&+ D^{(2n+1)}_{\frac{1}{2}} \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})}{(x_{-n} - x_{-n+1})(x_{-n} - x_{-n+2})} \\
&\quad \frac{\cdots (x - x_n)(x - x_{-n})}{\cdots (x_{-n} - x_n)(x_{-n} - x_{n+1})}
\end{aligned}\right\} \quad (13).$$

Hier sind also die in einer Zickzacklinie um x gelegenen Differenzen benutzt. Man wird $t = \frac{x - x_0}{x_0 - x_1}$ wieder als neue Veränderliche einführen. Ebenso kann man weitere Formeln bilden je nach der Lage der Tafelwerte bezüglich x, z. B. solche analog zu den Formeln von Gauß, Stirling und Bessel für gleiche Tafelabstände. Dabei treten hier an Stelle der einfachen Mittel

$$\frac{1}{2}\left(\Delta^{(2\mu+1)}_{-\frac{1}{2}} + \Delta^{(2\mu+1)}_{\frac{1}{2}}\right) \text{ bzw. } \frac{1}{2}\left(\Delta^{(2\mu)}_{0} + \Delta^{(2\mu)}_{1}\right)$$

die allgemeineren Mittel

$$\frac{1}{2}\left(D^{(2\mu+1)}_{-\frac{1}{2}} + P^{(2\mu+1)}_{0} \cdot D^{(2\mu+1)}_{\frac{1}{2}}\right)$$

bzw.

$$\frac{1}{2}\left(D^{(2\mu)}_{0} + P^{(2\mu)}_{\frac{1}{2}} \cdot D^{(2\mu)}_{1}\right).$$

Für die Interpolation in manchen Tafeln mit ungleichen Tafelabständen wird man mehrere solcher Formeln benutzen müssen, je nach der Lage und der Dichte der Tafelwerte in der Umgebung von x.

Diese Formeln erweisen sich vor allem bei der Interpolation einer Funktion von mehreren Veränderlichen durch Interpolationen nach je einer Veränderlichen als zweckmäßig, falls die Tafel für eine oder mehrere Veränderliche ungleiche Tafelabstände besitzt, aber für alle tabulierten Werte der Veränderlichen die Einteilung nach einer Veränderlichen stets dieselbe ist. In diesem Falle stellt man sich für jede Veränderliche das Schema der $P_\nu^{(\mu)}$ und bei Interpolation nach (10) oder einer der anderen Formen die Folge der a_ν bzw. der entsprechenden Größen auf.

Für die in vielen Fällen ausreichende quadratische Interpolation liefert (10) mit $\frac{x - x_0}{x_0 - x_1} = -t$ und den meist in den Tafeln stehenden ersten Differenzen den Näherungswert

$$\left.\begin{aligned}
y = y_0 - \Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}} \cdot t &+ \left(\Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}} - P_1^{(1)} \Delta^{(1)}_{\frac{3}{2}}\right) \\
&\cdot t(1 - t) \frac{P_1^{(1)}}{P_1^{(1)} + 1}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (14)$$

(13) den Näherungswert

$$\left.\begin{aligned}
y = y_0 - \Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}} t &+ \left(\Delta^{(1)}_{-\frac{1}{2}} - P_0^{(1)} \Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}}\right) \\
&\cdot t(1 - t) \frac{1}{P_0^{(1)}(P_0^{(1)} + 1)}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (15).$$

(Liegt die Interpolationsstelle im Intervall $x_0 x_1$ näher an x_2 als an x_{-1}, so wird man im allgemeinen (14), sonst (15) benutzen.) Für die Skala der Tafelargumente berechnet man die Tafel der P, ferner für jedes Intervall die beiden Koeffizienten

$$k_1 = \frac{P_1^{(1)}}{P_1^{(1)} + 1} \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{1}{P_0^{(1)}(P_0^{(1)} + 1)}$$

und kann den quadratischen Beitrag unter Benutzung der meist in den Tafeln angegebenen ersten Differenzen z. B. mit einer Rechenmaschine mit Komplementschieber und Mehrfachmultiplikation rasch berechnen.

München. J. Heinhold. 376

Über die Berechnung von beliebig langen Aggregaten und „Faktorgregaten" mit Hilfe eines einzigen einfachen Nomogramms. 1. Die Aggregate wollen wir annehmen in der Gestalt

$$f(\eta) = \varphi_0(\xi) \pm \varphi_1(\xi') \pm \varphi_2(\xi'') \pm \cdots \pm \varphi_n(\xi^{(n)}),$$

während wir unter einem Faktorgregat einen Ausdruck verstehen wollen von der Gestalt

$$g(\eta) = \varphi_0(\xi) \cdot \varphi_1(\xi')^{\pm 1} \cdot \varphi_2(\xi'')^{\pm 1} \cdots \varphi_n(\xi^{(n)})^{\pm 1},$$

so daß also der Logarithmus eines Faktorgregates gleich wird mit dem Aggregat der Logarithmen der Glieder.

Dann hat Verf. bereits früher [1]) darauf hingewiesen, daß man (im Falle von lauter Pluszeichen) die Berechnung der zugehörigen Summen und Produkte bei beliebiger Länge vornehmen kann durch geeignete mehrmalige Verwendung eines einzigen Nomogramms für Addition bzw. Logarithmen-Addition. Inzwischen hat Verf. bemerkt, daß man auch beliebig viele Glieder mit negativem Vorzeichen zulassen kann, daß also auch die Berechnung beliebiger Aggregate bzw. Faktorgregate auf diesem Wege ebenso leicht möglich ist.

2. Nun zur Sache. Wir dürfen uns dabei auf die Berechnung von Aggregaten beschränken, da ja — wie schon erwähnt — der Logarithmus eines Faktorgregates gleich dem Aggregat der Gliederlogarithmen ist.

Man nehme also eine gewöhnliche Netztafel für Addition und zeichne darauf links von und parallel zur y-Achse (Nullpunkte gleich hoch mit dem Koordinatenanfang) je eine Skala für $f(\eta)$ und $\varphi_0(\xi)$, sowie unterhalb von und parallel zur x-Achse (Nullpunkte senkrecht unter dem Koordinatenanfang) weiter Skalen für

$$\pm\varphi_1(\xi'), \quad \pm\varphi_2(\xi''), \quad \cdots, \quad \pm\varphi_n(\xi^{(n)});$$

dabei sind die Skalenrichtungen gleich oder entgegen der Richtung der x-Achse zu wählen, je nachdem das Zeichen + oder — gilt, und es können die letzteren Skalen ganz oder teilweise zusammengelegt werden, wenn dies möglich ist. Die Skalen seien gegeben durch die Formeln

$$y = l\,f(\eta), \quad y_0 = l\,\varphi_0(\xi), \quad x_1 = \pm l\,\varphi_1(\xi'),$$
$$x_2 = \pm l\,\varphi_2(\xi''), \quad \cdots, \quad x_n = \pm l\,\varphi_n(\xi^{(n)}).$$

Die Skaleneinheitsstrecke ist also überall dieselbe.

Nunmehr gestaltet sich die Verwendung der so erhaltenen Tafel folgendermaßen: Man geht vom Punkt $(0, y_0)$ horizontal und vom Punkt $(x_1, 0)$ vertikal zum Punkt (x_1, y_0), von da schräg (in Richtung $x + y = \text{const.}$) zum Punkt $(0, y_0 + x_1)$; sodann geht man allgemein vom Punkt $(0, y_0 + x_1 + \ldots + x_{\nu-1})$ horizontal und vom Punkt $(x_\nu, 0)$ vertikal bis zum Punkt $(x_\nu, y_0 + x_1 + \ldots + x_{\nu-1})$, sowie von da schräg zum Punkt $(0, y_0 + x_1 + \ldots + x_{\nu-1} + x_\nu)$. So kommt man zuletzt zum Punkt $(0, y) = (0, y_0 + x_1 + \ldots + x_n)$ und hat damit den Wert $f(\eta)$ berechnet.

3. Wenn es sich lediglich darum handelt, Aggregate von nur positiven Größen zu berechnen, so kann man — um Papier zu sparen — auch folgendermaßen vorgehen: Man superponiert eine gewöhnliche Additionstafel mit einer (ebenso gewöhnlichen) Subtraktionstafel, d. h. man zeichnet auf nicht zu engem quadratischem Netzpapier zwei nicht zu dichte Scharen von Geraden

$$x + y = \text{const.}, \quad x - y = \text{const.}$$

[1]) AWF-Mitteilungen 21. Jahrg. (1939), Heft 5, S. 77.

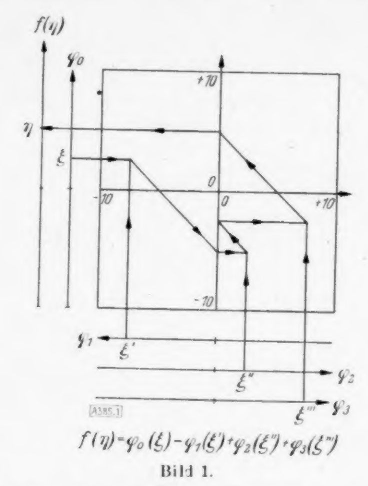


Bild 1.

Auf dieser Doppeltafel zeichnet man zwei Skalen für $f(\eta)$ und $\varphi_0(\xi)$ wie vorhin, sowie bis zu n Skalen für $\varphi_1(\xi')$, $\varphi_2(\xi'')$, ..., $\varphi_n(\xi^{(n)})$, diesmal sämtlich in gleicher Richtung mit der x-Achse.

Die Verwendung dieses Rechenpapiers gestaltet sich dann ähnlich wie soeben, mit dem einzigen Unterschied, daß die x hinter dem Komma ein Vorzeichen ± bekommen, und man vom Punkt $(x_\nu, y_0 \pm x_1 \pm \cdots \pm x_{\nu-1})$ zum Punkte $(0, y_0 \pm x_1 \pm \cdots \pm x_{\nu-1} \pm x_\nu)$ dadurch gelangt, daß man entlang der ersten oder zweiten Geradenschar geht, je nachdem für das Glied x_ν das Zeichen + bzw. — gilt.

4. Zum Schlusse weisen wir darauf hin, daß man die hier zur Rede stehenden Funktionszusammenhänge, besonders die relativ häufig auftretenden und darum wichtigen Faktorgregate, bisher immer in viel komplizierterer Weise dargestellt hat. Vgl. neben den Beispielen in der unter [1]) zitierten Note noch das Buch von H. Körwien, Graphisches Rechnen (Nomographie), Deutsche Werkmeister-Bücherei, etwa 1940, Fig. 89—91, wo die Formel

$$\lambda = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{l}{d^2} \cdot \frac{P}{E}$$

sehr umständlich mittels dreigliedriger (zusammengesetzter) Tafeln dargestellt ist.

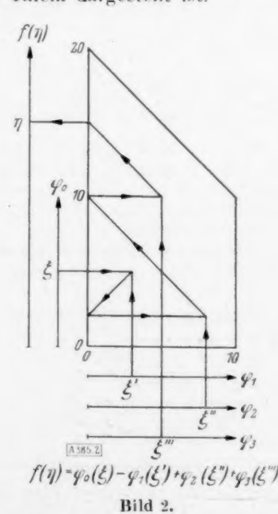


Bild 2.

Münster i. W. Ludwig Neder. 385

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr.-Ing. WILHELM **CAUER**, B. Apl. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin u. Leiter des Laboratoriums der Mix & Genest AG., Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, 1. Bd. XII + 614 S. m. 426 Abb. Leipzig 1941, Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler Kom.-Ges. Preis geb. 45 M.

Für die Theorie und die Berechnung elektrischer Schaltungen waren die Kirchhoffschen Gesetze und die komplexe Rechnung während vieler Jahre die einzige und auch ausreichende Grundlage. Erst die Erfindung der elektrischen Siebketten und die damit zusammenhängenden Probleme der elektrischen Nachrichtentechnik stellten die Schaltungslehre vor neue Aufgaben, deren Lösung weitergehende Hilfsmittel erfordert. Während man z. B. den Frequenzgang der Eigenschaften einer gegebenen Schaltung mit den altbekannten Methoden leicht berechnen kann, reichen diese zur Lösung der umgekehrten Aufgabe nicht hin. Den ersten Schritt zur Bestimmung von Schaltungen, deren Betriebseigenschaften in gewünschter Weise von der Frequenz abhängen, tat Cauer auf der Grundlage eines von R. M. Foster 1924 gegebenen Reaktanztheorems in der 1927 erschienenen Arbeit über „die Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit". Im Anschluß hieran hat Cauer in tiefgehenden Untersuchungen die allgemeinen mathematischen Zusammenhänge zwischen den Schaltungen und ihren Betriebseigenschaften erforscht und für die praktische Berechnung ausgewertet. Über einen Teil dieser Arbeiten und auf denselben Gegenstand gerichtete Untersuchungen von O. Brune, W. Brandt, H. Piloty und anderen berichtet das vorliegende Werk.

Seinen Inhalt kennzeichnen die Kapitelüberschriften: I. Aufgabenstellung und Beispiele. II. Berechnung der Eigenschaften gegebener Schaltungen. III. Vierpole. IV. Positive Funktionen und positive Matrizen. V. Reaktanztheoreme. VI/VII. Wellenparametertheorie der Tiefpaß-Reaktanzfilter bzw. allgemeiner Filter. VIII. Reaktanzvierpole mit vorgegebenen Betriebseigenschaften. IX. Frequenzweichen. X. Äquivalenz von Reaktanzschaltungen.

Der Verfasser behandelt in knapper Form und in rühmenswerter mathematischer Strenge einen ausgedehnten Komplex von Problemen aus der Theorie der elektrischen Netze. Er beschränkt sich dabei keineswegs auf die allgemeinen theoretischen Grundlagen, sondern dringt bis zur praktischen Berechnung von technischen Einzelaufgaben vor, die durch zahlreiche Beispiele und Anleitungen erläutert wird. Allerdings ist das Buch nicht leicht lesbar. Der Verfasser sagt im Vorwort, daß „an mathematischen Vorkenntnissen nicht mehr vorausgesetzt wird, als was man bei einem Durchschnittsabsolventen einer Technischen Hochschule voraussetzen darf". Nach meiner Kenntnis der Verhältnisse dürften nur wenige akademisch vorgebildete Ingenieure über das Maß an Vorkenntnissen verfügen, die das Studium dieses Buches tatsächlich erfordert. Störend wirken die Unterbrechungen der Gedankenfolge durch eingestreute mathematische Exkursionen, die nur in losem Zusammenhang mit dem Thema stehen. Wer sich ungeachtet dieser Schwierigkeiten die Mühe nicht verdrießen läßt, das Buch gründlich durchzuarbeiten, wird reichen Gewinn davontragen.

Die Berechnung der Filter hat der Verfasser etwas einseitig auf die Approximation nach Tschebyscheff abgestellt: es wäre erwünscht, daß er daneben auch noch mehr auf andere Arbeiten einginge. Ferner möchte man sich für die Neuauflage die Beseitigung von sprachlichen Amerikanismen, wie „Laplace-Entwicklung", „Brune-Prozeß", „Tschebyscheff-Verhalten" (statt „Laplacesche Entwicklung" usw.) wünschen. Diese kritischen Bemerkungen sollen den hohen Wert des Cauerschen Buches nicht herabsetzen.

Berlin. K. W. Wagner. 393

Dr.-Ing. MAX **SCHILHANSL**, Die mittragende Breite bei der Kreisplatte mit radialen Rippen. (VDI-Forschungsheft 411, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Bd. 12, Nov./Dez. 1941.) 25 S. m. 13 Bildern und 9 Tafeln. Berlin 1941, VDI-Verlag G.m.b.H. Preis brosch. 5 M.

Für die belastete Kreisplatte mit radialen Rippen werden Spannungen und Verschiebungen ermittelt, indem Kreisplatte und Rippen getrennt als Scheibenprobleme behandelt werden und in den Verbindungslinien gleiche Radialverschiebungen und Schubspannungen verlangt werden. Die Einleitung gibt ein vorzügliches Bild, wie das Problem angefaßt worden ist. Weiter folgen umfangreiche für den angewandten Mathematiker beachtenswerte Berechnungen und Umformungen. Zum Schlusse wird ein der Rippenlage entsprechendes Sternsystem von T-förmigen Trägern angegeben mit gleichen elastischen Randeigenschaften; die Flanschbreite der T-Träger wird als mittragende Breite bezeichnet.

Dresden. C. Weber. 399

Dr. C. **SCHAEFER**, Prof. a. d. Universität Breslau, u. Dr. L. **BERGMANN**, Prof. a. d. Technischen Hochschule Breslau, Grundaufgaben des physikalischen Praktikums, bearbeitet von Dr. W. Kliefoth, Lehrbeauftragter a. d. Universität und Technischen Hochschule Breslau. VI + 218 S. m. 182 Abb. Leipzig und Berlin 1942, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 5,60 M.

Das Erscheinen der vorliegenden Anleitung zum Physikalischen Praktikum ist von Lehrenden und Lernenden sicher mit größter Genugtuung begrüßt worden, da es beim praktischen physikalischen Anfängerunterricht eine allgemein empfundene Lücke ausfüllt. Angesichts des derzeitigen großen Mangels an Lehrkräften ist für einen erfolgreichen Unterricht im Physikalischen Praktikum eine gute Anleitung die unerläßliche Voraussetzung. Wir haben zwar für die Physiker und im besonderen auch für die Mediziner in den Büchern von Westphal bzw. Gerthsen-Pollermann sehr nützliche Einführungen ins Physikalische Praktikum. Doch fehlte es bisher an einer geeigneten Anweisung für alle anderen Gruppen, wie Chemiker und Ingenieure.

Das Buch bringt nicht nur eine genaue Anweisung zur Durchführung der Versuche, sondern auch zu jeder Aufgabe eine Einführung in ihre physikalischen Grundlagen. So bildet das Buch einmal eine sehr wertvolle Ergänzung zum eigentlichen Lehrbuch und vermag außerdem die Unterrichtsassistenten außerordentlich zu entlasten.

Die Aufgabenzusammenstellung entspricht etwa dem an den meisten Physikalischen Instituten üblichen Praktikum. Über die Auswahl im einzelnen kann man selbstverständlich verschiedener Auffassung sein. Doch gehören einige Aufgaben aus der Strömungslehre, sowie Aufgaben zur allgemeinen Schwingungslehre, z. B. über erzwungene Schwingungen, den Übergang zur Resonanz, gekoppelte Schwingungen, auch zum Aufgabenplan

für Ingenieure. Ihre Berücksichtigung in der nächsten Auflage würde daher den Wert des vortrefflichen Büchleins nur steigern.

Dresden. H. Stuart. 381

Dr. phil., Dr.-Ing. e. h., Dr. phys. e. h. R. W. **POHL,** o. ö. Prof. a. d. Univ. Göttingen, Einführung in die Mechanik, Akustik und Wärmelehre. 3. u. 4. Aufl. X + 322 S. m. 527 Abb. Berlin 1941, Verlag J. Springer. Preis geb. 15,80 M.

Die beiden ersten Auflagen dieses ausgezeichneten Lehrbuchs waren bereits in dieser Zeitschrift (Bd. 10 [1930] S. 419 und Bd. 12 [1932] S. 124) besprochen worden. Die günstige Beurteilung, die das Buch damals erfuhr, kann in verstärktem Maß für die neue Auflage gelten. Die Knappheit und Schärfe des Ausdrucks, die glückliche Wahl sinnfälliger und einprägsamer Beispiele, die große Anschaulichkeit der Abbildungen, namentlich der für die Pohlschen Bücher charakteristischen Schattenrisse, die Vollständigkeit und Fülle des behandelten Stoffs sichern dem Buch auch weiterhin seinen Rang unter den besten Physikbüchern. Zu dem in den früheren Auflagen behandelten Stoff, der teilweise umgearbeitet, teilweise, namentlich durch ein Kapitel über die Eigenschaften der festen Körper, erweitert worden ist, tritt in der neuen Auflage die Wärmelehre. Den Hauptinhalt bildet, nach einer kurzen Einführung der Grundbegriffe, die Behandlung der beiden Hauptsätze, wobei wiederum die Erzielung klaren Verständnisses für die physikalische Bedeutung und die technische Anwendbarkeit der Sätze durch einfache Beispiele und anschauliche Darstellung vollkommen erreicht wird. Die Einführung des Entropiebegriffs erfolgt im Anschluß an die Besprechung nichtumkehrbarer Vorgänge als Maß der Nichtumkehrbarkeit, der zweite Hauptsatz wird im Anschluß an die Berechnung des größtmöglichen Wirkungsgrades einer Wärmekraftmaschine formuliert. Hervorzuheben wäre vielleicht noch als charakteristisch für die Darstellung die Verwendung des für die Technik wichtigen Enthalpie-Entropie-Diagramms. Neuartig in dem Buch ist — einem an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt eingeführten Gebrauch folgend — die Benutzung des Wortes „Kilopond" an Stelle von „kg-Kraft", während das Wort „Kilogramm" die „kg-Masse" bezeichnet.

Berlin. E. Mosch. 380

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr.-Ing. WILLIBALD **LICHTENHELDT,** Einfache Konstruktionsverfahren zur Ermittlung der Abmessungen von Kurbelgetrieben (VDI-Forschungsheft 408, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Bd. 12, Mai/Juni 1941). 22 S. m. 71 Bildern. Berlin 1941, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 5 M.

Dr. phil. nat. habil. MAX **STECK,** Dozent der Math. a. d. Techn. Hochschule München, Das Hauptproblem der Mathematik. XVI + 232 S. Berlin 1942, Dr. Georg Lüttke Verlag. Preis geb. 10,60 M.

Dr.-Ing. RICHARD EMIL **KUTTERER,** Ballistik, mit einem Vorwort von Geh. Reg.-Rat Dr. C. Cranz. (Die Wissenschaft, Einzeldarstellungen aus der Naturwissenschaft u. der Technik, Bd. 97, herausgegeben von Prof. Dr. Wilhelm Westphal.) VIII + 208 S. Braunschweig 1942, Verlag Friedr. Vieweg & Sohn. Preis geb. 13,50 M.

WERNER **HEISENBERG,** Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft. 6 Vorträge. 3. erw. Aufl. 95 S. Leipzig 1942, Verlag S. Hirzel. Preis kart. 3,50 M.

Dr. FRANZ **BAUR,** Prof. a. d. Universität Frankfurt/M., Einführung in die Großwetterforschung. (Math.-Phys. Bibl. Reihe I: herausgegeben von W. Lietzmann und W. Kliefoth, Bd. 88.) 2. verb. Aufl. 53 S. m. 14 Abb. im Text. Leipzig-Berlin 1942, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 1,20 M.

Prof. Dr. PAUL **RIEBESELL,** Mathematik des täglichen Lebens. 52 S. Hamburg 1942, Hanseatische Verlagsanstalt. Preis kart. 2 M.

THEODOR **VAHLEN,** Ballistik. 2. Aufl. neubearb. u. herausgeg. unter Mitwirkung von Alfred Klose. X + 267 S. m. 65 Abb. Berlin 1942, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 18 M.

Prof. G. **MAHLER,** Physikalische Aufgabensammlung. Neu bearb. von Prof. K. Mahler, Studienrat a. d. Schubartoberschule Aalen in Württemberg. 6. verb. Aufl. (Sammlung Göschen Bd. 243). 128 S. Berlin 1942, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Dr.-Ing. P. **WERKMEISTER,** em. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden, Vermessungskunde, I. Stückmessung und Nivellieren. 7. Aufl. (Sammlung Göschen Bd. 468). 165 S. m. 145 Fig. Berlin 1942, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

NACHRICHTEN

Wissenschaftlicher Wettbewerb der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik e. V.

Die Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik schreibt wie in anderen Jahren auch für das Jahr 1942/43 einen Wettbewerb für wissenschaftliche Arbeiten aus. Zugelassen sind wissenschaftliche Arbeiten von Wert aus den Gebieten der Zeitmeßkunde und Uhrentechnik. Ein festes Thema ist nicht vorgeschrieben. Für Preise steht ein Betrag von 2000,— RM zur Verfügung. Diesen Wettbewerb betreffende Anfragen sind zu richten an die Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik e. V., Berlin SW 68, Neuenburger Str. 8. 387

Berichtigung zu der Besprechung des Buches von Dr. H. Blasius: **Wärmelehre, Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942), S. 62. „Herr Blasius weist mich darauf hin, daß er die Enthalpie *i* mit „Energiestrom", nicht, wie es in meiner Besprechung infolge eines Schreibfehlers heißt, mit „Wärmestrom" bezeichnet. Meine Bedenken beziehen sich auf die Möglichkeit der Verwechslung dieser Bezeichnung mit der „Inneren Energie *u*" (nach Blasius „Energieinhalt") sowie darauf, daß man in der Technik unter Strom allgemein eine Größe bezogen auf die Zeiteinheit versteht."

Dresden. W. Pauer VDI. 401

Für den Textteil verantwortlich: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.